

Séparabilité simple de l'équation de Helmholtz ou de l'équation de Laplace pour des systèmes de coordonnées de révolution dans l'hyper-espace

Auteur : Henri Lévêque, 62 rue de la Liberté, Carcassonne, henrilevequehanoi@gmail.com

On dénomme x_0 la hauteur et ρ le rayon de révolution. Ces deux variables du système de révolution sont définies par l'intermédiaire d'une fonction analytique du plan complexe, que l'on va dénommée **fonction de révolution**. (Voir 1931, E.W.Hobson « The theory of spherical and ellipsoidal harmonics » chapitre 10 « Harmonics for spaces bounded by surfaces of revolution », 1959, L.Robin « Fonctions sphériques de Legendre et Fonctions Sphéroïdales » Tome III, chapitre 9, « Applications des fonctions de Legendre aux surfaces de révolution, avec des systèmes de coordonnées curvilignes orthogonales autre que les coordonnées sphériques », 1939, R.Lagrange « Les familles de surfaces de révolution qui possèdent des harmoniques », Acta Mathematica 71, page 283, repris en note de bas de page dans l'ouvrage de L.Robin , chapitre 9 page 180)

Le plan complexe correspond à l'un quelconque des hyper-plans où sont définies les « méridiennes » des iso-variétés du système de coordonnées orthogonales : $x_0 + i\rho = f(\xi + i\eta)$. La fonction de révolution possède la propriété « miroir » : $x_0 - i\rho = f(\xi - i\eta)$. L'analyticité de la fonction f entraîne que toutes les iso-surfaces de révolution $\eta = \text{Cste}$ et $\vartheta = \text{Cste}$ sont orthogonales l'une de l'autre puisque :

$$\begin{aligned} f(\xi + i\eta) \text{ analytique} &\Rightarrow f(\xi + i\eta) = x_0(\xi, \eta) + i\rho(\xi, \eta) \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho(\xi, \eta)}{\partial \xi} = -\frac{\partial x_0(\xi, \eta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \rho(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial x_0(\xi, \eta)}{\partial \xi} \end{array} \right. &\Rightarrow \frac{\partial \rho(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{\partial \rho(\eta, \theta)}{\partial \eta} + \frac{\partial x_0(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{\partial x_0(\xi, \eta)}{\partial \eta} = 0 \end{aligned}$$

Ce qui est la condition d'orthogonalité des iso-courbes sur l'hyper-plan méridien (les vecteurs normaux des deux iso-variétés sont perpendiculaires). Les deux nouvelles variables ξ, η et les angles restant des rotations de $SO(N-1)$ forment un système de coordonnées orthogonales car elles sont définies à l'aide de fonctions analytiques a priori quelconque du plan complexe. L'ensemble des rotations de $SO(N-1)$ autour de l'axe x_0 des courbes engendrée $\xi = \text{Cste}$ ou $\eta = \text{Cste}$ forment des iso-variétés de dimension N . On a par ailleurs :

$$\rho = \frac{f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta)}{2i} \quad x_0 = \frac{f(\xi + i\eta) + f(\eta - i\theta)}{2}$$

Tout se passe comme si l'on écrivait les formules de passage vers les coordonnées cartésiennes suivantes :

$$\begin{cases} x_0 = x_0(\xi, \eta) \\ x_1 = \rho(\xi, \eta) \cos(\vartheta_{N-1}) \quad \vartheta_{N-1} \in [0, \pi] \\ x_2 = \rho(\xi, \eta) \sin(\vartheta_{N-1}) \cos(\vartheta_{N-2}) \quad \vartheta_{N-2} \in [0, \pi] \\ \dots \\ x_N = \rho(\xi, \eta) \sin(\vartheta_{N-1}) \sin(\vartheta_{N-2}) \dots \sin(\vartheta_2) \sin(\vartheta_1) \quad \vartheta_1 = \varphi \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

En introduisant les rayons successifs : $\rho_i^2 = \sum_{l=i}^{l=N} x_l^2$ et spécialement $\rho_1^2 = \sum_{l=1}^{l=N} x_l^2 = \rho^2$

Nous pouvons exprimer ces rayons en fonction du système d'angle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1^2 = \rho^2 \quad \rho_2^2 = \rho^2 \sin^2(\vartheta_{N-1}) \\ \dots \\ \rho_i^2 = \rho^2 \prod_{l=1}^{l=i-1} \sin^2(\vartheta_{N-l}) \\ \dots \\ \rho_{N-1}^2 = \rho^2 \sin^2(\vartheta_{N-1}) \sin^2(\vartheta_{N-2}) \dots \sin^2(\vartheta_2) = \rho^2 \prod_{l=1}^{l=N-2} \sin^2(\vartheta_{N-l}) \\ \rho_N^2 = \rho^2 \sin^2(\vartheta_{N-1}) \sin^2(\vartheta_{N-2}) \dots \sin^2(\vartheta_2) \sin^2(\vartheta_1) = \rho^2 \prod_{l=1}^{l=N-1} \sin^2(\vartheta_{N-l}) \end{array} \right.$$

Comme la métrique de ce système de coordonnées s'écrit :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=N} dx_i^2 &= d\rho^2 + \sum_{i=1}^{i=N-1} \rho_i^2 d\vartheta_{N-i}^2 \\ d\rho \pm i dx_0 &= f'(\xi \pm i\eta)(d\xi \pm i d\eta) \quad d\rho - \pm i dx_0 = f'(\xi - \pm i\eta)(d\xi - \pm i d\eta) \\ \Rightarrow d\rho^2 + dx_0^2 &= f'(\xi + i\eta)f'(\xi + i\eta)(d\xi^2 + d\eta^2) \\ \Rightarrow dx_0^2 + \sum_{i=1}^{i=N} dx_i^2 &= f'(\xi + i\eta)f'(\xi + i\eta)(d\xi^2 + d\eta^2) + \sum_{i=1}^{i=N-1} \rho_i^2 d\vartheta_{N-i}^2 \end{aligned}$$

Le laplacien a la forme suivante dans cette métrique :

$$\begin{aligned} ds^2 &= h_\xi^2 d\xi^2 + h_\eta^2 d\eta^2 + \sum_{i=1}^{i=N-1} h_{\vartheta_i}^2 d\vartheta_{N-i}^2 \quad g = h_\xi^2 h_\eta^2 \prod_{i=1}^{i=N-1} h_{\vartheta_i}^2 \quad \sqrt{g} = h_\xi h_\eta \prod_{i=1}^{i=N-1} h_{\vartheta_i} \\ \Delta T &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\sqrt{g}}{h_\xi^2} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\sqrt{g}}{h_\eta^2} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^{i=N-1} \frac{\partial}{\partial \vartheta_i} \left(\frac{\sqrt{g}}{h_i^2} \frac{\partial T}{\partial \vartheta_i} \right) \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} h_\xi = h_\eta = (f'(\xi + i\eta)f'(\xi - i\eta))^{\frac{1}{2}} \\ h_{\vartheta_{N-1}} = \rho_1 = \rho \\ h_{\vartheta_{N-2}} = \rho_2 = \rho \sin(\vartheta_{N-1}) \\ \dots \\ h_{\vartheta_i} = \rho_{N-i} = \rho \prod_{l=i+1}^{l=N-1} \sin(\vartheta_l) \\ \dots \\ h_{\vartheta_1} = \rho_{N-1} = \rho \prod_{l=2}^{l=N-1} \sin(\vartheta_l) \end{array} \right. &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{g} = h_\xi h_\eta h_{\vartheta_{N-1}} h_{\vartheta_{N-2}} \dots h_{\vartheta_1} = f'(\xi + i\eta)f'(\xi - i\eta) \rho^{N-1} \prod_{l=2}^{l=N-1} \sin^{l-1}(\vartheta_l) \\ \frac{\sqrt{g}}{h_\xi^2} = \frac{\sqrt{g}}{h_\eta^2} = \rho^{N-1} \prod_{l=2}^{l=N-1} \sin^{l-1}(\vartheta_l) \\ \frac{\sqrt{g}}{h_{\vartheta_i}^2} = f'(\xi + i\eta)f'(\xi - i\eta) \rho^{N-3} \frac{\prod_{l=2, l \neq i}^{l=N-1} \sin^{l-1}(\vartheta_l)}{\prod_{l=i+1}^{l=N-1} \sin^2(\vartheta_l)} \sin^{i-1}(\vartheta_l) \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ce qui donne finalement :

$$\Delta T = \frac{1}{\rho^{N-1} f'(\xi + i\eta) f'(\xi - i\eta)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\rho^{N-1} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\rho^{N-1} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \right\} + \frac{1}{\rho^2} \sum_{i=1}^{i=N-1} \frac{1}{\prod_{l=i+1}^{l=N-1} \sin^2(\vartheta_l)} \frac{1}{\sin^{l-1}(\vartheta_l)} \frac{\partial}{\partial \eta_l} \left(\sin^{l-1}(\vartheta_l) \frac{\partial T}{\partial \eta_l} \right)$$

On retrouve l'expression déjà établi dans le cas à 3 dimensions, comme $N=2$:

$$\Delta T = \frac{1}{\rho f'(\xi + i\eta) f'(\xi - i\eta)} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\rho \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\rho \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}$$

L'équation de Helmholtz a également la forme suivante :

$$\Delta T + \omega^2 T = \frac{1}{\rho^{N-1} f'(\xi + i\eta) f'(\xi - i\eta)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\rho^{N-1} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\rho^{N-1} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \right\} + \frac{1}{\rho^2} \sum_{i=1}^{i=N-1} \frac{1}{\prod_{l=i+1}^{l=N-1} \sin^2(\vartheta_l)} \frac{1}{\sin^{l-1}(\vartheta_l)} \frac{\partial}{\partial \eta_l} \left(\sin^{l-1}(\vartheta_l) \frac{\partial T}{\partial \eta_l} \right) + \omega^2 T = 0$$

En introduisant comme auparavant l'opérateur différentielle du moment angulaire sur l'hyper-sphère $N-1$, il vient pour les deux équations aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} \Delta T = \frac{1}{\rho^{N-1} f'(\xi + i\eta) f'(\xi - i\eta)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\rho^{N-1} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\rho^{N-1} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \right\} + \frac{L_{N-1}^2(T)}{\rho^2} = 0 \\ \Delta T + \omega^2 T = \frac{1}{\rho^{N-1} f'(\xi + i\eta) f'(\xi - i\eta)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\rho^{N-1} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\rho^{N-1} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \right\} + \frac{L_{N-1}^2(T)}{\rho^2} + \omega^2 T = 0 \end{cases}$$

Remarque importante : si la fonction de révolution échange les coordonnées ρ et x_0 alors le produit suivant reste le même : $f'(\xi + i\eta) f'(\xi - i\eta)$. C'est le cas lorsque l'on opère une transformation de la fonction de révolution simple de multiplication par i (ou de rotation dans le plan complexe de ρ et x_0). Cette opération est utile pour trouver des systèmes de coordonnées orthogonales complémentaires par rotation autour de l'axe ρ et non de l'axe x_0 .

Déterminons des conditions particulières pour lesquelles l'équation de Helmholtz devient séparable et par suite l'équation de Laplace l'est pour $\omega=0$. Supposons que la solution T soit séparable en trois fonctions des coordonnées curvilignes :

$$\begin{aligned}
 T &= \Xi(\xi)H(\eta)\Omega(\Theta) \quad \Theta = (\vartheta_{N-1}, \dots, \vartheta_1) \quad L_{N-1}^2(T) = \Xi(\xi)H(\eta)L_{N-1}^2(\Omega(\Theta)) \quad \Delta_{N+1}T + \omega^2T = 0 \quad \rho = \frac{f(\xi+i\eta)-f(\xi-i\eta)}{2i} \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{\Xi(\xi)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left((f(\xi+i\eta)-f(\xi-i\eta))^{N-1} \frac{\partial \Xi(\xi)}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{H(\eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left((f(\xi+i\eta)-f(\xi-i\eta))^{N-1} \frac{\partial H(\eta)}{\partial \eta} \right) - \frac{4}{(f(\xi+i\eta)-f(\xi-i\eta))^2} \frac{L_{N-1}^2(\Omega(\Theta))}{\Omega(\Theta)} + \omega^2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \left(\frac{(f(\xi+i\eta)-f(\xi-i\eta))^2}{f'(\xi+i\eta)f'(\xi-i\eta)} \frac{\Xi''(\xi)}{\Xi(\xi)} + (N-1) \frac{(f(\xi+i\eta)-f(\xi-i\eta))(f'(\xi+i\eta)-f'(\xi-i\eta))}{f'(\xi+i\eta)f'(\xi-i\eta)} \frac{\Xi'(\xi)}{\Xi(\xi)} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{(f(\xi+i\eta)-f(\xi-i\eta))^2}{f'(\xi+i\eta)f'(\xi-i\eta)} \frac{H''(\eta)}{H(\eta)} + i(N-1) \frac{(f(\xi+i\eta)-f(\xi-i\eta))(f'(\xi+i\eta)+f'(\xi-i\eta))}{f'(\xi+i\eta)f'(\xi-i\eta)} \frac{H'(\eta)}{H(\eta)} + \right. \\
 &\quad \left. -4 \frac{L_{N-1}^2(\Omega(\Theta))}{\Omega(\Theta)} \right) + \omega^2 (f(\xi+i\eta)+f(\xi-i\eta))^2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \left(\frac{\Xi''(\xi)}{\Xi(\xi)} + (N-1) \frac{f'(\xi+i\eta)-f'(\xi-i\eta)}{f(\xi+i\eta)-f(\xi-i\eta)} \frac{\Xi'(\xi)}{\Xi(\xi)} + \frac{H''(\eta)}{H(\eta)} + i(N-1) \frac{f'(\xi+i\eta)+f'(\xi-i\eta)}{f(\xi+i\eta)-f(\xi-i\eta)} \frac{H'(\eta)}{H(\eta)} + \right. \\
 &\quad \left. -4 \frac{L_{N-1}^2(\Omega(\Theta))}{\Omega(\Theta)} \frac{f'(\xi+i\eta)f'(\xi-i\eta)}{(f(\xi+i\eta)-f(\xi-i\eta))^2} \right) + \omega^2 f'(\xi+i\eta)f'(\xi-i\eta) = 0
 \end{aligned}$$

Le terme angulaire doit être constant dans la séparation, il vient donc :

$$\begin{aligned}
 \frac{L_{N-1}^2(\Omega(\Theta))}{\Omega(\Theta)} &= -\mu(\mu+2\lambda-1) \Rightarrow L_{N-1}^2(\Omega(\Theta)) + \mu(\mu+2\lambda-1)\Omega(\Theta) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \left(\frac{\Xi''(\xi)}{\Xi(\xi)} + (N-1) \frac{f'(\xi+i\eta)-f'(\xi-i\eta)}{f(\xi+i\eta)-f(\xi-i\eta)} \frac{\Xi'(\xi)}{\Xi(\xi)} + \frac{H''(\eta)}{H(\eta)} + i(N-1) \frac{f'(\xi+i\eta)+f'(\xi-i\eta)}{f(\xi+i\eta)-f(\xi-i\eta)} \frac{H'(\eta)}{H(\eta)} + \right. \\
 &\quad \left. + 4\mu(\mu+2\lambda-1) \frac{f'(\xi+i\eta)f'(\xi-i\eta)}{(f(\xi+i\eta)-f(\xi-i\eta))^2} \right) + \omega^2 f'(\xi+i\eta)f'(\xi-i\eta) = 0
 \end{aligned}$$

L'équation de Helmholtz devient donc :

$$\begin{aligned}
 \text{Supposons que} \quad &\begin{cases} \frac{f'(\xi+i\eta)f'(\xi-i\eta)}{(f(\xi+i\eta)-f(\xi-i\eta))^2} = \chi_1(\xi) + \chi_2(\eta) \\ \frac{f'(\xi+i\eta)-f'(\xi-i\eta)}{f(\xi+i\eta)-f(\xi-i\eta)} = F_1(\xi) \\ i \frac{f'(\xi+i\eta)+f'(\xi-i\eta)}{f(\xi+i\eta)-f(\xi-i\eta)} = F_2(\eta) \\ f'(\xi+i\eta)f'(\xi-i\eta) = G_1(\xi) + G_2(\eta) \end{cases} \quad \text{et} \quad \text{Posons} \quad \lambda = \frac{N-1}{2} \\
 &\Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} &\frac{\Xi''(\xi)}{\Xi(\xi)} + 2\lambda F_1(\xi) \frac{\Xi'(\xi)}{\Xi(\xi)} + 4\mu(\mu+2\lambda-1)\chi_1(\xi) + \omega^2 G_1(\xi) + \\ &+ \frac{H''(\eta)}{H(\eta)} + 2\lambda F_2(\eta) \frac{H'(\eta)}{H(\eta)} + 4\mu(\mu+2\lambda-1)\chi_2(\eta) + \omega^2 G_2(\eta) \end{aligned} \right\} = 0 \quad L_{N-1}^2(\Omega(\Theta)) + \mu(\mu+2\lambda-1)\Omega(\Theta) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \Xi''(\xi) + 2\lambda F_1(\xi)\Xi'(\xi) + (4\mu(\mu+2\lambda-1)\chi_1(\xi) + \omega^2 G_1(\xi) - \alpha)\Xi(\xi) = 0 \\ H''(\eta) + 2\lambda F_2(\eta)H'(\eta) + (4\mu(\mu+2\lambda-1)\chi_2(\eta) + \omega^2 G_2(\eta) + \alpha)H(\eta) = 0 \\ L_{N-1}^2(\Omega(\Theta)) + \mu(\mu+2\lambda-1)\Omega(\Theta) = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

L'équation de Laplace quant à elle devient :

$$\begin{cases} \Xi''(\xi) + 2\lambda F_1(\xi)\Xi'(\xi) + (4\mu(\mu + 2\lambda - 1)\chi_1(\xi) - \alpha)\Xi(\xi) = 0 \\ H''(\eta) + 2\lambda F_2(\eta)H'(\eta) + (4\mu(\mu + 2\lambda - 1)\chi_2(\eta) + \alpha)H(\eta) = 0 \\ L_{N-1}^2(\Omega(\Theta)) + \mu(\mu + 2\lambda - 1)\Omega(\Theta) = 0 \end{cases}$$

Résumons la recette pour trouver les équations simplement séparées des équations de Laplace et Helmholtz d'après la fonction de révolution :

$$\begin{aligned} \text{Supposons que } & \begin{cases} \frac{f'(\xi + i\eta)f'(\xi - i\eta)}{(f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta))^2} = \chi_1(\xi) + \chi_2(\eta) \\ \frac{f'(\xi + i\eta) - f'(\xi - i\eta)}{f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta)} = F_1(\xi) \\ i \frac{f'(\xi + i\eta) + f'(\xi - i\eta)}{f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta)} = F_2(\eta) \\ f'(\xi + i\eta)f'(\xi - i\eta) = G_1(\xi) + G_2(\eta) \end{cases} \quad \text{et} \quad \text{Posons } \lambda = \frac{N-1}{2} \\ \text{Alors } & \begin{cases} \text{Helmholtz} \Leftrightarrow \begin{cases} \Xi''(\xi) + 2\lambda F_1(\xi)\Xi'(\xi) + (4\mu(\mu + 2\lambda - 1)\chi_1(\xi) + \omega^2 G_1(\xi) - \alpha)\Xi(\xi) = 0 \\ H''(\eta) + 2\lambda F_2(\eta)H'(\eta) + (4\mu(\mu + 2\lambda - 1)\chi_2(\eta) + \omega^2 G_2(\eta) + \alpha)H(\eta) = 0 \\ L_{N-1}^2(\Omega(\Theta)) + \mu(\mu + 2\lambda - 1)\Omega(\Theta) = 0 \end{cases} \\ \text{Laplace} \Leftrightarrow \begin{cases} \Xi''(\xi) + 2\lambda F_1(\xi)\Xi'(\xi) + (4\mu(\mu + 2\lambda - 1)\chi_1(\xi) - \alpha)\Xi(\xi) = 0 \\ H''(\eta) + 2\lambda F_2(\eta)H'(\eta) + (4\mu(\mu + 2\lambda - 1)\chi_2(\eta) + \alpha)H(\eta) = 0 \\ L_{N-1}^2(\Omega(\Theta)) + \mu(\mu + 2\lambda - 1)\Omega(\Theta) = 0 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Exemple de simple séparabilité : système hyper-cylindrique

$$\begin{aligned} f(\xi + i\eta) = \xi + i\eta = x_0 + i\rho & \Rightarrow f'(\xi + i\eta) = f'(\xi - i\eta) = 1 \\ \Rightarrow & \begin{cases} \frac{f'(\xi + i\eta)f'(\xi - i\eta)}{(f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta))^2} = -\frac{1}{4\eta^2} \Rightarrow \chi_1(\xi) = 0 \quad \chi_2(\eta) = -\frac{1}{4\eta^2} \\ \frac{f'(\xi + i\eta) - f'(\xi - i\eta)}{f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta)} = F_1(\xi) = 0 \quad i \frac{f'(\xi + i\eta) + f'(\xi - i\eta)}{f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta)} = F_2(\eta) = \frac{1}{\eta} \\ G_1(\xi) = G_2(\eta) = 1 \end{cases} \\ \text{Alors } & \begin{cases} \Xi''(\xi) + (\omega^2 - \alpha)\Xi(\xi) = 0 \\ H''(\eta) + \frac{2\lambda}{\eta}H'(\eta) + \left(\omega^2 + \alpha - \frac{\mu(\mu + 2\lambda - 1)}{\eta^2}\right)H(\eta) = 0 \\ L_{N-1}^2(\Omega(\Theta)) + \mu(\mu + 2\lambda - 1)\Omega(\Theta) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Exemple de simple séparabilité : système hyper-sphérique

$$f(\xi + i\eta) = e^{\xi+i\eta} = e^{\xi} e^{i\eta} \Rightarrow \begin{cases} f'(\xi + i\eta) = f(\xi + i\eta) = e^{\xi+i\eta} & f'(\xi - i\eta) = f(\xi - i\eta) = e^{\xi-i\eta} \\ \frac{f'(\xi + i\eta)f'(\xi - i\eta)}{(f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta))^2} = -\frac{1}{4\sin^2(\eta)} \Rightarrow \chi_1(\xi) = 0 & \chi_2(\eta) = -\frac{1}{4\sin^2(\eta)} \\ \frac{f'(\xi + i\eta) - f'(\xi - i\eta)}{f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta)} = 1 = F_1(\xi) \\ f'(\xi + i\eta)f'(\xi - i\eta) = e^{2\xi} \Rightarrow G_1(\xi) = e^{2\xi} & G_2(\eta) = 0 \\ i \frac{f'(\xi + i\eta) + f'(\xi - i\eta)}{f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta)} = \frac{\cos(\eta)}{\sin(\eta)} = \cotan(\eta) = F_2(\eta) \end{cases}$$

$$\text{Alors Helmholtz} \quad \begin{cases} \Xi''(\xi) + 2\lambda \Xi'(\xi) + (\omega^2 e^{2\xi} - \alpha) \Xi(\xi) = 0 \\ H''(\eta) + 2\lambda \cotan(\eta) H'(\eta) + \left(\alpha - \frac{\mu(\mu + 2\lambda - 1)}{\sin^2(\eta)} \right) H(\eta) = 0 \\ L_{N-1}^2(\Omega(\Theta)) + \mu(\mu + 2\lambda - 1) \Omega(\Theta) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Posons} \quad \begin{cases} r = e^{\xi} \\ dr = r d\xi \\ \Xi'(\xi) = r \Xi'(r) \\ \Xi''(\xi) = r \Xi'(r) + r^2 \Xi''(r) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^2 \Xi''(r) + (2\lambda + 1) r \Xi'(r) + (\omega^2 r^2 - \alpha) \Xi(\xi) = 0 \\ H''(\eta) + 2\lambda \cotan(\eta) H'(\eta) + \left(\alpha - \frac{\mu(\mu + 2\lambda - 1)}{\sin^2(\eta)} \right) H(\eta) = 0 \\ L_{N-1}^2(\Omega(\Theta)) + \mu(\mu + 2\lambda - 1) \Omega(\Theta) = 0 \end{cases}$$

Exemple de simple séparabilité : système hyper-sphéroïdal allongée

$$f(\xi + i\eta) = c \cosh(\xi + i\eta) \Rightarrow \begin{cases} f'(\xi + i\eta) = c \sinh(\xi + i\eta) & f'(\xi - i\eta) = c \sinh(\xi - i\eta) \\ f'(\xi + i\eta)f'(\xi - i\eta) = c^2 (\sinh^2(\xi) + \sin^2(\eta)) = c^2 (\cosh^2(\xi) - \cos^2(\eta)) \\ f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta) = 2ic \sinh(\xi) \sin(\eta) \\ f'(\xi + i\eta) - f'(\xi - i\eta) = 2ic \cosh(\xi) \sin(\eta) \\ f'(\xi + i\eta) + f'(\xi - i\eta) = 2c \sinh(\xi) \cos(\eta) \\ (f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta))^2 = -4c^2 \sinh^2(\xi) \sin^2(\eta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{f'(\xi + i\eta)f'(\xi - i\eta)}{(f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta))^2} = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sinh^2(\eta)} + \frac{1}{\sin^2(\eta)} \right) \Rightarrow \chi_1(\xi) = -\frac{1}{4\sinh^2(\eta)} & \chi_2(\eta) = -\frac{1}{4\sin^2(\eta)} \\ \frac{f'(\xi + i\eta) - f'(\xi - i\eta)}{f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta)} = \cotanh(\xi) = F_1(\xi) \\ f'(\xi + i\eta)f'(\xi - i\eta) = c^2 (\cosh^2(\xi) - \cos^2(\eta)) \Rightarrow G_1(\xi) = c^2 \cosh^2(\xi) & G_2(\eta) = -c^2 \cos^2(\eta) \\ i \frac{f'(\xi + i\eta) + f'(\xi - i\eta)}{f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta)} = \cotan(\eta) = F_2(\eta) \end{cases}$$

$$\text{Alors Helmholtz} \quad \begin{cases} \Xi''(\xi) + 2\lambda \cotanh(\xi) \Xi'(\xi) + \left(-\alpha - \frac{\mu(\mu + 2\lambda - 1)}{\sinh^2(\eta)} + \omega^2 c^2 \cosh^2(\xi) \right) \Xi(\xi) = 0 \\ H''(\eta) + 2\lambda \cotan(\eta) H'(\eta) + \left(\alpha - \frac{\mu(\mu + 2\lambda - 1)}{\sin^2(\eta)} - \omega^2 c^2 \cos^2(\eta) \right) H(\eta) = 0 \\ L_{N-1}^2(\Omega(\Theta)) + \mu(\mu + 2\lambda - 1) \Omega(\Theta) = 0 \end{cases}$$

Pour obtenir les équations différentielles usuelles du système hyper-sphéroïdal allongé, il suffit d'effectuer les changements de variable suivant :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \tilde{\xi} = \text{Cosh}(\xi) \\ \tilde{\eta} = \text{Cos}(\eta) \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} \Xi'(\xi) = \frac{d\tilde{\xi}}{d\xi} \Xi'(\tilde{\xi}) = \text{Sinh}(\xi) \Xi'(\tilde{\xi}) \rightarrow \text{Cotanh}(\xi) \Xi'(\xi) = \tilde{\xi} \Xi'(\tilde{\xi}) \\ \Xi''(\xi) = \frac{d^2\tilde{\xi}}{d\xi^2} \Xi'(\tilde{\xi}) + \left(\frac{d\tilde{\xi}}{d\xi}\right)^2 \Xi''(\tilde{\xi}) = \tilde{\xi} \Xi'(\tilde{\xi}) + (\tilde{\xi}^2 - 1) \Xi''(\tilde{\xi}) \\ H'(\eta) = -\text{Sin}(\eta) H'(\tilde{\eta}) \rightarrow \text{Cotan}(\eta) H'(\eta) = -\tilde{\eta} H'(\tilde{\eta}) \\ H''(\eta) = -\tilde{\eta} H'(\tilde{\eta}) + (1 - \tilde{\eta}^2) H''(\tilde{\eta}) \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} (\tilde{\xi}^2 - 1) \Xi''(\tilde{\xi}) + (2\lambda + 1) \tilde{\xi} \Xi'(\tilde{\xi}) - \left(\alpha - \omega^2 c^2 \tilde{\xi}^2 + \frac{\mu(\mu + 2\lambda - 1)}{\tilde{\xi}^2 - 1} \right) \Xi(\tilde{\xi}) = 0 \\ (1 - \tilde{\eta}^2) H''(\tilde{\eta}) - (2\lambda + 1) \tilde{\eta} H'(\tilde{\eta}) + \left(\alpha - \omega^2 c^2 \tilde{\eta}^2 - \frac{\mu(\mu + 2\lambda - 1)}{1 - \tilde{\eta}^2} \right) H(\tilde{\eta}) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Exemple de simple séparabilité : système hyper-sphéroïdal aplati

$$\begin{aligned} f(\xi + i\eta) = c \text{Sinh}(\xi + i\eta) &\Rightarrow \begin{cases} f'(\xi + i\eta) = c \text{Cosh}(\xi + i\eta) & f'(\xi - i\eta) = c \text{Cosh}(\xi - i\eta) \\ f'(\xi + i\eta) f'(\xi - i\eta) = c^2 (\text{Cosh}^2(\xi) - \text{Sin}^2(\eta)) = c^2 (\text{Sinh}^2(\xi) + \text{Cos}^2(\eta)) \\ f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta) = 2ic \text{Cosh}(\xi) \text{Sin}(\eta) \\ f'(\xi + i\eta) - f'(\xi - i\eta) = 2ic \text{Sinh}(\xi) \text{Sin}(\eta) \\ f'(\xi + i\eta) + f'(\xi - i\eta) = 2c \text{Cosh}(\xi) \text{Cos}(\eta) \\ (f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta))^2 = -4c^2 \text{Cosh}^2(\xi) \text{Sin}^2(\eta) \end{cases} \\ \left\{ \begin{aligned} \frac{f'(\xi + i\eta) f'(\xi - i\eta)}{(f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta))^2} &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\text{Cosh}^2(\eta)} - \frac{1}{\text{Sin}^2(\eta)} \right) \Rightarrow \chi_1(\xi) = \frac{1}{4 \text{Cosh}^2(\eta)} & \chi_2(\eta) &= -\frac{1}{4 \text{Sin}^2(\eta)} \\ \frac{f'(\xi + i\eta) - f'(\xi - i\eta)}{f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta)} &= \text{Tanh}(\xi) = F_1(\xi) \\ f'(\xi + i\eta) f'(\xi - i\eta) &= c^2 (\text{Cosh}^2(\xi) - \text{Sin}^2(\eta)) = c^2 (\text{Sinh}^2(\xi) + \text{Cos}^2(\eta)) \Rightarrow \begin{cases} G_1(\xi) = c^2 \text{Sinh}^2(\xi) \\ G_1(\xi) = c^2 \text{Cosh}^2(\xi) \end{cases} & \begin{cases} G_2(\eta) = c^2 \text{Cos}^2(\eta) \\ G_2(\eta) = -c^2 \text{Sin}^2(\eta) \end{cases} \\ i \frac{f'(\xi + i\eta) + f'(\xi - i\eta)}{f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta)} &= \text{Cotan}(\eta) = F_2(\eta) \end{aligned} \right. \\ \text{Alors Helmholtz} &\begin{cases} \Xi''(\xi) + 2\lambda \text{Tanh}(\xi) \Xi'(\xi) + \left(-\alpha + \frac{\mu(\mu + 2\lambda - 1)}{\text{Cosh}^2(\eta)} + \omega^2 c^2 \text{Cosh}^2(\xi) \right) \Xi(\xi) = 0 \\ H''(\eta) + 2\lambda \text{Cotan}(\eta) H'(\eta) + \left(\alpha - \frac{\mu(\mu + 2\lambda - 1)}{\text{Sin}^2(\eta)} - \omega^2 c^2 \text{Sin}^2(\eta) \right) H(\eta) = 0 \\ L_{N-1}^2(\Omega(\Theta)) + \mu(\mu + 2\lambda - 1) \Omega(\Theta) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Pour obtenir les équations différentielles usuelles du système hyper-sphéroïdal aplati, il suffit d'effectuer les changements de variable suivant :

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} \tilde{\xi} = \sinh(\xi) \\ \tilde{\eta} = \cos(\eta) \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} \Xi'(\xi) = \frac{d\tilde{\xi}}{d\xi} \Xi'(\tilde{\xi}) = \cosh(\xi) \Xi'(\tilde{\xi}) \rightarrow \tanh(\xi) \Xi'(\xi) = \tilde{\xi} \Xi'(\tilde{\xi}) \\ \Xi''(\xi) = \frac{d^2\tilde{\xi}}{d\xi^2} \Xi'(\tilde{\xi}) + \left(\frac{d\tilde{\xi}}{d\xi}\right)^2 \Xi''(\tilde{\xi}) = \tilde{\xi} \Xi'(\tilde{\xi}) + (\tilde{\xi}^2 + 1) \Xi''(\tilde{\xi}) \\ H'(\eta) = -\sin(\eta) H'(\tilde{\eta}) \rightarrow \cotan(\eta) H'(\eta) = -\tilde{\eta} H'(\tilde{\eta}) \\ H''(\eta) = -\tilde{\eta} H'(\tilde{\eta}) + (1 - \tilde{\eta}^2) H''(\tilde{\eta}) \end{cases} \\
 \Rightarrow &\begin{cases} (\tilde{\xi}^2 + 1) \Xi''(\tilde{\xi}) + (2\lambda + 1) \tilde{\xi} \Xi'(\tilde{\xi}) + \left(-\alpha + \omega^2 c^2 (1 + \tilde{\xi}^2) + \frac{\mu(\mu + 2\lambda - 1)}{\tilde{\xi}^2 + 1}\right) \Xi(\tilde{\xi}) = 0 \\ (1 - \tilde{\eta}^2) H''(\tilde{\eta}) - (2\lambda + 1) \tilde{\eta} H'(\tilde{\eta}) + \left(\alpha - \omega^2 c^2 (1 - \tilde{\eta}^2) - \frac{\mu(\mu + 2\lambda - 1)}{1 - \tilde{\eta}^2}\right) H(\tilde{\eta}) = 0 \end{cases} \\
 \tilde{\omega}^2 = -\omega^2 &\Rightarrow \begin{cases} (\tilde{\xi}^2 + 1) \Xi''(\tilde{\xi}) + (2\lambda + 1) \tilde{\xi} \Xi'(\tilde{\xi}) - \left(\alpha + \tilde{\omega}^2 c^2 (1 + \tilde{\xi}^2) - \frac{\mu(\mu + 2\lambda - 1)}{\tilde{\xi}^2 + 1}\right) \Xi(\tilde{\xi}) = 0 \\ (1 - \tilde{\eta}^2) H''(\tilde{\eta}) - (2\lambda + 1) \tilde{\eta} H'(\tilde{\eta}) + \left(\alpha + \tilde{\omega}^2 c^2 (1 - \tilde{\eta}^2) - \frac{\mu(\mu + 2\lambda - 1)}{1 - \tilde{\eta}^2}\right) H(\tilde{\eta}) = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Exemple de simple séparabilité: système hyper-parabolique de révolution

$$\begin{aligned}
 f(\xi + i\eta) &= c \frac{(\xi + i\eta)^2}{2} \Rightarrow f'(\xi + i\eta) = c(\xi + i\eta) \quad f'(\xi - i\eta) = c(\xi - i\eta) \\
 \Rightarrow &\begin{cases} \frac{f'(\xi + i\eta)f'(\xi - i\eta)}{(f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta))^2} = -\frac{1}{4\xi^2} - \frac{1}{4\eta^2} \Rightarrow \chi_1(\xi) = -\frac{1}{4\xi^2} \quad \chi_2(\eta) = -\frac{1}{4\eta^2} \\ \frac{f'(\xi + i\eta) - f'(\xi - i\eta)}{f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta)} = F_1(\xi) = \frac{1}{\xi} \quad i \frac{f'(\xi + i\eta) + f'(\xi - i\eta)}{f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta)} = F_2(\eta) = \frac{1}{\eta} \\ f'(\xi + i\eta)f'(\xi - i\eta) = c^2(\xi^2 + \eta^2) \Rightarrow G_1(\xi) = c^2\xi^2 \quad G_2(\eta) = c^2\eta^2 \end{cases} \\
 \text{Alors} &\begin{cases} \Xi''(\xi) + \frac{2\lambda}{\xi} \Xi'(\xi) + \left(c^2\xi^2\omega^2 - \frac{\mu(\mu + 2\lambda - 1)}{\xi^2} - \alpha\right) \Xi(\xi) = 0 \\ H''(\eta) + \frac{2\lambda}{\eta} H'(\eta) + \left(c^2\eta^2\omega^2 - \frac{\mu(\mu + 2\lambda - 1)}{\eta^2} + \alpha\right) H(\eta) = 0 \\ L_{N-1}^2(\Omega(\Theta)) + \mu(\mu + 2\lambda - 1)\Omega(\Theta) = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Nous allons maintenant passer à l'étude de la R-Séparabilité pour un système de coordonnées de révolution dans l'hyper-espace.

R-Séparabilité de l'équation de Laplace pour des systèmes de coordonnées de révolution dans l'hyper-espace

Supposons maintenant que la solution soit R-Séparable de la forme :

$$T = R(\xi, \eta)U(\xi, \eta, \Theta) = R(\xi, \eta)\Xi(\xi)H(\eta)\Omega(\Theta) \quad \Theta = (\vartheta_{N-1}, \dots, \vartheta_1)$$

Il vient :

$$\Delta T = \frac{1}{\rho^{N-1} f'(\xi + i\eta) f'(\xi - i\eta)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\rho^{N-1} \frac{\partial(R(\xi, \eta)U(\xi, \eta, \Theta))}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\rho^{N-1} \frac{\partial(R(\xi, \eta)U(\xi, \eta, \Theta))}{\partial \eta} \right) + \right. \\ \left. + \rho^{N-3} f'(\xi + i\eta) f'(\xi - i\eta) R(\xi, \eta) L_{N-1}^2(U(\xi, \eta, \Theta)) \right\} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\rho^{N-1} \frac{\partial(R(\xi, \eta)U(\xi, \eta, \Theta))}{\partial \xi} \right) = \left\{ \rho^{N-1} R(\xi, \eta) \frac{\partial^2 U(\xi, \eta, \Theta)}{\partial \xi^2} + \rho^{N-1} R(\xi, \eta) \left[\frac{2}{R(\xi, \eta)} \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \frac{N-1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right] \frac{\partial U(\xi, \eta, \Theta)}{\partial \xi} + \right. \\ \left. + U(\xi, \eta, \Theta) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\rho^{N-1} \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right) \right\}$$

Or $\frac{2}{R(\xi, \eta)} \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \frac{N-1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} (\text{Log}(\rho^{N-1} R^2(\xi, \eta)))$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\rho^{N-1} \frac{\partial(R(\xi, \eta)U(\xi, \eta, \Theta))}{\partial \xi} \right) = \left\{ \rho^{N-1} R(\xi, \eta) \left[\frac{\partial^2 U(\xi, \eta, \Theta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial \xi} (\text{Log}(\rho^{N-1} R^2(\xi, \eta))) \frac{\partial U(\xi, \eta, \Theta)}{\partial \xi} \right] + \right. \\ \left. + U(\xi, \eta, \Theta) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\rho^{N-1} \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right) \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\rho^{N-1} \frac{\partial(R(\xi, \eta)U(\xi, \eta, \Theta))}{\partial \eta} \right) = \left\{ \rho^{N-1} R(\xi, \eta) \left[\frac{\partial^2 U(\xi, \eta, \Theta)}{\partial \eta^2} + \frac{\partial}{\partial \eta} (\text{Log}(\rho^{N-1} R^2(\xi, \eta))) \frac{\partial U(\xi, \eta, \Theta)}{\partial \eta} \right] + \right. \\ \left. + U(\xi, \eta, \Theta) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\rho^{N-1} \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) \right\}$$

$$\Rightarrow \Delta T = \frac{R(\xi, \eta)}{f'(\xi + i\eta) f'(\xi - i\eta)} \left\{ \frac{\partial^2 U(\xi, \eta, \Theta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial \xi} (\text{Log}(\rho^{N-1} R^2(\xi, \eta))) \frac{\partial U(\xi, \eta, \Theta)}{\partial \xi} + \frac{U(\xi, \eta, \Theta)}{R(\xi, \eta)} \frac{1}{\rho^{N-1}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\rho^{N-1} \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 U(\xi, \eta, \Theta)}{\partial \eta^2} + \frac{\partial}{\partial \eta} (\text{Log}(\rho^{N-1} R^2(\xi, \eta))) \frac{\partial U(\xi, \eta, \Theta)}{\partial \eta} + \frac{U(\xi, \eta, \Theta)}{R(\xi, \eta)} \frac{1}{\rho^{N-1}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\rho^{N-1} \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) + \right. \\ \left. + \frac{f'(\xi + i\eta) f'(\xi - i\eta)}{\rho^2} L_{N-1}^2(U(\xi, \eta, \Theta)) \right\} = 0$$

Compte tenu de la valeur de $\rho : \rho = \frac{f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta)}{2i}$, Il vient :

$$\frac{\Delta T}{\Xi(\xi)H(\eta)\Omega(\Theta)} = \frac{R(\xi, \eta)}{f'(\xi + i\eta) f'(\xi - i\eta)} \left\{ \frac{1}{\Xi(\xi)} \left[\Xi''(\xi) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\text{Log}(\rho^{N-1} R^2(\xi, \eta))) \Xi'(\xi) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{R(\xi, \eta)} \frac{1}{\rho^{N-1}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\rho^{N-1} \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right) + \right. \\ \left. \frac{1}{H(\eta)} \left[H''(\eta) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\text{Log}(\rho^{N-1} R^2(\xi, \eta))) H'(\eta) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{R(\xi, \eta)} \frac{1}{\rho^{N-1}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\rho^{N-1} \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) + \right. \\ \left. - 4 \frac{f'(\xi + i\eta) f'(\xi - i\eta)}{(f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta))^2} \frac{1}{\Omega(\Theta)} L_{N-1}^2(\Omega(\Theta)) \right\} = 0$$

Le terme angulaire doit être constant dans la séparation: $L_{N-1}^2(\Omega(\Theta)) + \mu(\mu + 2\lambda - 1)\Omega(\Theta) = 0$

$$\text{Soit finalement : } \left(\begin{aligned} & \frac{1}{\Xi(\xi)} \left[\Xi''(\xi) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\text{Log}(\rho^{N-1} R^2(\xi, \eta)) \right) \Xi'(\xi) \right] + \\ & + \frac{1}{H(\eta)} \left[H''(\eta) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\text{Log}(\rho^{N-1} R^2(\xi, \eta)) \right) H'(\eta) \right] + \\ & + \frac{1}{R(\xi, \eta)} \frac{1}{\rho^{N-1}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\rho^{N-1} \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{R(\xi, \eta)} \frac{1}{\rho^{N-1}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\rho^{N-1} \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) + \\ & + 4\mu(\mu + 2\lambda - 1) \frac{f'(\xi + i\eta)f'(\xi - i\eta)}{(f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta))^2} \end{aligned} \right) = 0$$

On retrouve l'expression lorsque la fonction R-Séparable est constante égale à 1 :

$$\left(\begin{aligned} & \frac{1}{\Xi(\xi)} \left[\frac{\partial^2 U(\xi, \eta, \Theta)}{\partial \xi^2} + (N-1) \frac{\partial}{\partial \xi} (\text{Log}(f(\eta + i\theta) - f(\eta - i\theta))) \frac{\partial U(\xi, \eta, \Theta)}{\partial \xi} \right] + \\ & + \frac{1}{H(\eta)} \left[\frac{\partial^2 U(\xi, \eta, \Theta)}{\partial \eta^2} + (N-1) \frac{\partial}{\partial \eta} (\text{Log}(f(\eta + i\theta) - f(\eta - i\theta))) \frac{\partial U(\xi, \eta, \Theta)}{\partial \eta} \right] + 4\mu(\mu + 2\lambda - 1) \frac{f'(\xi + i\eta)f'(\xi - i\eta)}{(f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta))^2} \end{aligned} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{aligned} & \frac{\Xi''(\xi)}{\Xi(\xi)} + (N-1) \frac{f'(\xi + i\eta) - f'(\xi - i\eta)}{f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta)} \frac{\Xi'(\xi)}{\Xi(\xi)} + \frac{H''(\eta)}{H(\eta)} + i(N-1) \frac{f'(\xi + i\eta) + f'(\xi - i\eta)}{f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta)} \frac{H'(\eta)}{H(\eta)} + \\ & + 4\mu(\mu + 2\lambda - 1) \frac{f'(\xi + i\eta)f'(\xi - i\eta)}{(f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta))^2} \end{aligned} \right) = 0$$

Revenons au cas général d'une fonction de R-Séparation non constante. La première condition pour laquelle l'équation de Laplace peut être R-séparable porte sur la séparation des deux termes suivants :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\text{Log}(\rho^{N-1} R^2(\xi, \eta))) = \frac{2}{R(\xi, \eta)} \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \frac{N-1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} = \frac{2}{R(\xi, \eta)} \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \xi} + (N-1) \frac{f'(\xi + i\eta) - f'(\xi - i\eta)}{f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta)} = F_1(\xi)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (\text{Log}(\rho^{N-1} R^2(\xi, \eta))) = \frac{2}{R(\xi, \eta)} \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \eta} + \frac{N-1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} = \frac{2}{R(\xi, \eta)} \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \eta} + i(N-1) \frac{f'(\xi + i\eta) + f'(\xi - i\eta)}{f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta)} = F_2(\eta)$$

$$\Leftrightarrow \text{Log}(\rho^{N-1} R^2(\xi, \eta)) = \int d\xi F_1(\xi) + \int d\eta F_2(\eta) \Leftrightarrow \rho^{N-1} R^2(\xi, \eta) = e^{\int d\xi F_1(\xi)} e^{\int d\eta F_2(\eta)} \quad R(\xi, \eta) = \frac{e^{\int d\xi F_1(\xi)} e^{\int d\eta F_2(\eta)}}{\rho^{N-1}}$$

$$\text{Comme } \rho = \frac{f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta)}{2i} \quad \rho \text{ réel} \Rightarrow \rho^2 = - \frac{(f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta))^2}{4}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \xi} = \frac{f'(\xi + i\eta) - f'(\xi - i\eta)}{2i} \quad \frac{\partial \rho}{\partial \eta} = \frac{f'(\xi + i\eta) + f'(\xi - i\eta)}{2} \quad \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \text{ et } \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \text{ réels}$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right)^2 = - \frac{(f'(\xi + i\eta) - f'(\xi - i\eta))^2}{4} \quad \left(\frac{\partial \rho}{\partial \eta} \right)^2 = \frac{(f'(\xi + i\eta) + f'(\xi - i\eta))^2}{4}$$

$$\text{Notons } \Delta_1 \rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \eta} \right)^2 \quad \text{et} \quad \Delta \rho = \frac{\partial^2 \rho}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial \eta^2} \quad \text{Alors } \Delta_1 \rho > 0$$

$$\Rightarrow \Delta_1 \rho = f'(\xi + i\eta)f'(\xi - i\eta) \frac{f'(\xi + i\eta)f'(\xi - i\eta)}{(f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta))^2} = - \frac{\Delta_1 \rho}{4\rho^2} = \chi_1(\xi) + \chi_2(\eta)$$

$$\text{Comme } \Delta_1 \rho > 0 \text{ et } \rho^2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} \chi_1(\xi) + \chi_2(\eta) < 0 & \text{et } \Delta_1 \rho = f'(\xi + i\eta)f'(\xi - i\eta) \Rightarrow f'(\xi + i\eta)f'(\xi - i\eta) > 0 \\ \text{et } (f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta))^2 < 0 \end{cases}$$

Cette condition implique donc des relations entre les grandeurs introduites, que l'on va exploiter.

Pour la suite des calculs sur la séparation potentielle de l'équation de Laplace, intéressons-nous maintenant aux deux termes : $\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\rho^{N-1} \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right)$ $\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\rho^{N-1} \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right)$, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= \frac{R(\xi, \eta)}{2} \left(F_1(\xi) - \frac{N-1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right) & \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= \frac{R(\xi, \eta)}{2} \left(F_2(\eta) - \frac{N-1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\rho^{N-1} \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \rho^{N-1} R(\xi, \eta) \left(F_1(\xi) - \frac{N-1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right) \right\} \\ &= \rho^{N-1} R(\xi, \eta) \left(\frac{F_1'(\xi)}{2} - \frac{N-1}{2\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \xi^2} + \frac{N-1}{2\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right)^2 \right) + \left(\frac{F_1(\xi)}{2} - \frac{N-1}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right) \left(\frac{1}{R(\xi, \eta)} \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \frac{N-1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\rho^{N-1} \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \rho^{N-1} R(\xi, \eta) \left(F_2(\eta) - \frac{N-1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \right) \right\} = \\ &= \rho^{N-1} R(\xi, \eta) \left(\frac{F_2'(\eta)}{2} - \frac{N-1}{2\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \eta^2} + \frac{N-1}{2\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \eta} \right)^2 \right) + \left(\frac{F_2(\eta)}{2} - \frac{N-1}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \right) \left(\frac{1}{R(\xi, \eta)} \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \eta} + \frac{N-1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \right) \\ \text{Comme } \frac{1}{R(\xi, \eta)} \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= \frac{1}{2} \left(F_1(\xi) - \frac{N-1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right) & \frac{1}{R(\xi, \eta)} \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= \frac{1}{2} \left(F_2(\eta) - \frac{N-1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \right) \\ \Rightarrow \frac{\left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\rho^{N-1} \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\rho^{N-1} \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) \right\}}{\rho^{N-1} R(\xi, \eta)} &= \left\{ \begin{aligned} &\frac{F_1'(\xi)}{2} + \left(\frac{F_1(\xi)}{2} - \frac{N-1}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right) \left(\frac{F_1(\xi)}{2} + \frac{N-1}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right) + \\ &\frac{F_2'(\eta)}{2} + \left(\frac{F_2(\eta)}{2} - \frac{N-1}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \right) \left(\frac{F_2(\eta)}{2} + \frac{N-1}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \right) \\ &- \frac{N-1}{2\rho} \Delta \rho + \frac{N-1}{2\rho^2} \Delta_1 \rho \end{aligned} \right\} \\ \Rightarrow \frac{\left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\rho^{N-1} \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\rho^{N-1} \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) \right\}}{\rho^{N-1} R(\xi, \eta)} &= \frac{F_1'(\xi)}{2} + \frac{(F_1(\xi))^2}{4} + \frac{F_2'(\eta)}{2} + \frac{(F_2(\eta))^2}{4} - \frac{N-1}{2\rho} \Delta \rho + \frac{(N-1)(3-N)}{4\rho^2} \Delta_1 \rho \end{aligned}$$

Le Laplacien 2D sur ρ est nul : $\Delta \rho = \frac{\partial^2 \rho}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial \eta^2} = \frac{f''(\xi + i\eta) - f''(\xi - i\eta)}{2i} - \frac{f''(\xi + i\eta) - f''(\xi - i\eta)}{2i} = 0$

On écrit donc : $\frac{\left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\rho^{N-1} \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\rho^{N-1} \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) \right\}}{\rho^{N-1} R(\xi, \eta)} = \frac{F_1'(\xi)}{2} + \frac{(F_1(\xi))^2}{4} + \frac{F_2'(\eta)}{2} + \frac{(F_2(\eta))^2}{4} + \frac{(N-1)(3-N)}{4\rho^2} \Delta_1 \rho$

Test intermédiaire de « validité du calcul »

Si l'on revient à une fonction de séparation constante, soit le cas de la simple séparabilité, on sait que :

$$\begin{aligned} R(\xi, \eta) = 0 &\Rightarrow \frac{1}{R(\xi, \eta)} \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \xi} = 0 = \frac{1}{2} \left(F_1(\xi) - \frac{N-1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right) & \frac{1}{R(\xi, \eta)} \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \eta} = 0 &= \frac{1}{2} \left(F_2(\eta) - \frac{N-1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \right) \\ \Rightarrow F_1(\xi) &= \frac{N-1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} & F_2(\eta) &= \frac{N-1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \end{aligned}$$

L'expression : $\frac{F_1'(\xi)}{2} + \frac{(F_1(\xi))^2}{4} + \frac{F_2'(\eta)}{2} + \frac{(F_2(\eta))^2}{4} + \frac{(N-1)(3-N)}{4\rho^2} \Delta_1 \rho$ redonne bien une valeur nulle :

$$\begin{aligned} F_1(\xi) &= \frac{N-1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} & F_2(\eta) &= \frac{N-1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} & F_1'(\xi) &= \frac{N-1}{\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \xi^2} - \frac{N-1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right)^2 & F_2'(\eta) &= \frac{N-1}{\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \eta^2} - \frac{N-1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \eta} \right)^2 \\ \frac{F_1'(\xi)}{2} + \frac{(F_1(\xi))^2}{4} + \frac{F_2'(\eta)}{2} + \frac{(F_2(\eta))^2}{4} + \frac{(N-1)(3-N)}{4\rho^2} \Delta_1 \rho &= \\ &= \frac{N-1}{2\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \xi^2} - \frac{N-1}{2\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{N-1}{2\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \eta^2} - \frac{N-1}{2\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{(N-1)^2}{4\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{(N-1)^2}{4\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{(N-1)(3-N)}{4\rho^2} \Delta_1 \rho \\ &= \frac{(N-1)(N-3)}{4\rho^2} \left(\left(\frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \eta} \right)^2 \right) + \frac{(N-1)(3-N)}{4\rho^2} \Delta_1 \rho = 0 \end{aligned}$$

Une autre vérification consiste à se reporter au cas à 3 dimensions d'où $N=2$.

L'expression : $\frac{F_1'(\xi)}{2} + \frac{(F_1(\xi))^2}{4} + \frac{F_2'(\eta)}{2} + \frac{(F_2(\eta))^2}{4} + \frac{(N-1)(3-N)}{4\rho^2} \Delta_1 \rho$

devient : $\frac{F_1'(\xi)}{2} + \frac{(F_1(\xi))^2}{4} + \frac{F_2'(\eta)}{2} + \frac{(F_2(\eta))^2}{4} + \frac{\Delta_1 \rho}{4\rho^2}$ que l'on avait déjà calculée dans un autre document sur les système de coordonnées orthogonales de révolution.

Continuons le calcul entrepris pour les deux termes : $\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\rho^{N-1} \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right)$ $\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\rho^{N-1} \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right)$, afin d'en illustrer la séparabilité potentielle :

Posons $2r_1(\xi) = F_1(\xi)$ et $2r_2(\eta) = F_2(\eta) \Leftrightarrow r_1(\xi) = \frac{F_1(\xi)}{2}$ et $r_2(\eta) = \frac{F_2(\eta)}{2}$ De plus $-\frac{\Delta_1 \rho}{4\rho^2} = \chi_1(\eta) + \chi_2(\theta)$

Condition de séparabilité $\frac{\left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\rho^{N-1} \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\rho^{N-1} \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) \right\}}{\rho^{N-1} R(\xi, \eta)} = \kappa_1(\xi) + \kappa_2(\eta)$

Comme $\left\{ \frac{\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\rho^{N-1} \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\rho^{N-1} \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right)}{\rho^{N-1} R(\xi, \eta)} \right\} = \frac{F_1'(\xi)}{2} + \frac{(F_1(\xi))^2}{4} + \frac{F_2'(\eta)}{2} + \frac{(F_2(\eta))^2}{4} + \frac{(N-1)(3-N)}{4\rho^2} \Delta_1 \rho$
 $\Delta_1 \rho = -4\rho^2(\chi_1(\xi) + \chi_2(\eta))$

$$\Rightarrow \kappa_1(\xi) + \kappa_2(\eta) = \frac{F_1'(\xi)}{2} + \frac{(F_1(\xi))^2}{4} + \frac{F_2'(\eta)}{2} + \frac{(F_2(\eta))^2}{4} + \frac{(N-1)(3-N)}{4\rho^2} \Delta_1 \rho$$

$$\Rightarrow \kappa_1(\xi) + \kappa_2(\eta) = -(\chi_1(\xi) + \chi_2(\eta))(N-1)(3-N) + r_1'(\xi) + r_2'(\eta) + r_1^2(\xi) + r_2^2(\eta)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \kappa_1(\xi) = -(N-1)(3-N)\chi_1(\xi) + r_1'(\xi) + r_1^2(\xi) \\ \kappa_2(\eta) = -(N-1)(3-N)\chi_2(\eta) + r_2'(\eta) + r_2^2(\eta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa_1(\xi) = -(N-1)(3-N)\chi_1(\xi) + \frac{F_1'(\xi)}{2} + \frac{F_1^2(\xi)}{4} \\ \kappa_2(\eta) = -(N-1)(3-N)\chi_2(\eta) + \frac{F_2'(\eta)}{2} + \frac{F_2^2(\eta)}{4} \end{cases}$$

Les équations séparées issues de l'équation de Laplace deviennent alors :

$$\left(\frac{1}{\Xi(\xi)} [\Xi''(\xi) + 2r_1(\xi) \Xi'(\xi)] + r_1'(\xi) + r_1^2(\xi) + \frac{1}{H(\eta)} [H''(\eta) + 2r_2(\eta) H'(\eta)] + r_2'(\eta) + r_2^2(\eta) + \right. \\ \left. + \{4\mu(\mu + 2\lambda - 1) - (N-1)(3-N)\}(\chi_1(\xi) + \chi_2(\eta)) \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Xi''(\xi) + 2r_1(\xi) \Xi'(\xi) + (\{4\mu(\mu + 2\lambda - 1) - (N-1)(3-N)\} \chi_1(\xi) + r_1'(\xi) + r_1^2(\xi) - \alpha) \Xi(\xi) = 0 \\ H''(\eta) + 2r_2(\eta) H'(\eta) + (\{4\mu(\mu + 2\lambda - 1) - (N-1)(3-N)\} \chi_2(\eta) + r_2'(\eta) + r_2^2(\eta) + \alpha) H(\eta) = 0 \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \Xi''(\xi) + F_1(\xi) \Xi'(\xi) + \left(\{4\mu(\mu + 2\lambda - 1) - (N-1)(3-N)\} \chi_1(\xi) + \frac{F_1'(\xi)}{2} + \frac{F_1^2(\xi)}{4} - \alpha \right) \Xi(\xi) = 0 \\ H''(\eta) + F_2(\eta) H'(\eta) + \left(\{4\mu(\mu + 2\lambda - 1) - (N-1)(3-N)\} \chi_2(\eta) + \frac{F_2'(\eta)}{2} + \frac{F_2^2(\eta)}{4} + \alpha \right) H(\eta) = 0 \end{cases}$$

On retrouve bien les équations différentielles séparées lorsque la fonction de R-Séparation est égal à 1 :

$$\begin{cases} F_1(\xi) = (N-1) \frac{f'(\xi + i\eta) - f'(\xi - i\eta)}{f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta)} = (N-1) \tilde{F}_1(\xi) \\ F_2(\eta) = i(N-1) \frac{f'(\xi + i\eta) + f'(\xi - i\eta)}{f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta)} = (N-1) \tilde{F}_2(\eta) \end{cases} \quad \frac{f'(\xi + i\eta) f'(\xi - i\eta)}{(f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta))^2} = \chi_1(\xi) + \chi_2(\eta)$$

$$\frac{\left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\rho^{N-1} \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\rho^{N-1} \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) \right\}}{\rho^{N-1} R(\xi, \eta)} = \kappa_1(\xi) + \kappa_2(\eta) = 0 \Rightarrow \kappa_1(\xi) = \kappa_2(\eta) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{F_1'(\xi)}{2} + \frac{(F_1(\xi))^2}{4} - (N-1)(3-N) \chi_1(\xi) = 0 \\ \frac{F_2'(\eta)}{2} + \frac{(F_2(\eta))^2}{4} - (N-1)(3-N) \chi_2(\eta) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Xi''(\xi) + 2\lambda \tilde{F}_1(\xi) \Xi'(\xi) + (4\mu(\mu + 2\lambda - 1) \chi_1(\xi) - \alpha) \Xi(\xi) = 0 \\ H''(\eta) + 2\lambda \tilde{F}_2(\eta) H'(\eta) + (4\mu(\mu + 2\lambda - 1) \chi_2(\eta) + \alpha) H(\eta) = 0 \end{cases}$$

Résumons la recette pour trouver les équations R-séparées de l'équation de Laplace d'après la fonction de révolution et la fonction de séparation :

Supposons $R(\xi, \eta)$ telle que $\rho^{N-1} R^2(\xi, \eta) = e^{i d \xi F_1(\xi)} e^{i d \eta F_2(\eta)}$ avec $\rho = \frac{f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta)}{2i}$

Par intégration \rightarrow calcul de $F_1(\xi)$ et $F_2(\eta)$

$$\text{Supposons que } \begin{cases} -\frac{\Delta_1 \rho}{4\rho^2} = \chi_1(\xi) + \chi_2(\eta) \text{ avec } \Delta_1 \rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \eta}\right)^2 = f'(\xi + i\eta) f'(\xi - i\eta) \\ \Leftrightarrow \frac{f'(\xi + i\eta) f'(\xi - i\eta)}{(f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta))^2} = \chi_1(\xi) + \chi_2(\eta) \end{cases}$$

$$\text{Alors } \begin{cases} \Xi''(\xi) + F_1(\xi) \Xi'(\xi) + \left(\{4\mu(\mu + 2\lambda - 1) - (N-1)(3-N)\} \chi_1(\xi) + \frac{F_1'(\xi)}{2} + \frac{F_1^2(\xi)}{4} - \alpha \right) \Xi(\xi) = 0 \\ H''(\eta) + F_2(\eta) H'(\eta) + \left(\{4\mu(\mu + 2\lambda - 1) - (N-1)(3-N)\} \chi_2(\eta) + \frac{F_2'(\eta)}{2} + \frac{F_2^2(\eta)}{4} + \alpha \right) H(\eta) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Est posé } \lambda = \frac{N-1}{2} \rightarrow \begin{cases} \Xi''(\xi) + F_1(\xi) \Xi'(\xi) + \left((4\mu(\mu + 2\lambda - 1) - 4\lambda(1-\lambda)) \chi_1(\xi) + \frac{F_1'(\xi)}{2} + \frac{F_1^2(\xi)}{4} - \alpha \right) \Xi(\xi) = 0 \\ H''(\eta) + F_2(\eta) H'(\eta) + \left((4\mu(\mu + 2\lambda - 1) - 4\lambda(1-\lambda)) \chi_2(\eta) + \frac{F_2'(\eta)}{2} + \frac{F_2^2(\eta)}{4} + \alpha \right) H(\eta) = 0 \end{cases}$$

Lorsque la fonction de séparation est définie comme l'inverse de la racine carrée du rayon ρ à la puissance $N-1$, alors la forme des équations R-Séparée s'en trouve simplifiée :

Supposons $R(\xi, \eta)$ telle que $\rho^{N-1} R^2(\xi, \eta) = 1 = e^{i d \xi F_1(\xi)} e^{i d \eta F_2(\eta)}$

Alors $F_1(\xi) = 0$ et $F_2(\eta) = 0$

$$\text{Supposons que } -\frac{\Delta_1 \rho}{4\rho^2} = \chi_1(\xi) + \chi_2(\eta) \text{ avec } \Delta_1 \rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \eta}\right)^2 = f'(\xi + i\eta) f'(\xi - i\eta)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(\xi + i\eta) f'(\xi - i\eta)}{(f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta))^2} = \chi_1(\xi) + \chi_2(\eta) \text{ alors } \begin{cases} \Xi''(\xi) + (\{4\mu(\mu + 2\lambda - 1) - 4\lambda(1-\lambda)\} \chi_1(\xi) - \alpha) \Xi(\xi) = 0 \\ H''(\eta) + (\{4\mu(\mu + 2\lambda - 1) - 4\lambda(1-\lambda)\} \chi_2(\eta) + \alpha) H(\eta) = 0 \end{cases}$$

Lorsque la fonction de séparation est une constante, soit 1, alors les fonctions F_1 et F_2 sont déterminées complètement par la fonction de révolution, on est alors dans le cas de séparabilité simple de l'équation de Laplace :

$$\begin{cases} F_1(\xi) = (N-1) \frac{f'(\xi + i\eta) - f'(\xi - i\eta)}{f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta)} = (N-1) \tilde{F}_1(\xi) \\ F_2(\eta) = i(N-1) \frac{f'(\xi + i\eta) + f'(\xi - i\eta)}{f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta)} = (N-1) \tilde{F}_2(\eta) \end{cases} \quad \frac{f'(\xi + i\eta) f'(\xi - i\eta)}{(f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta))^2} = \chi_1(\xi) + \chi_2(\eta)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Xi''(\xi) + \tilde{F}_1(\xi) \Xi'(\xi) + (4\mu(\mu + 2\lambda - 1) \chi_1(\xi) - \alpha) \Xi(\xi) = 0 \\ H''(\eta) + \tilde{F}_2(\eta) H'(\eta) + (4\mu(\mu + 2\lambda - 1) \chi_2(\eta) + \alpha) H(\eta) = 0 \end{cases}$$

Remarque : plusieurs fonctions de séparation sont possibles pour rendre R-séparable l'équation de Laplace à $N+1$ dimensions. La plus belle illustration en est dans le système hyper-toroïdal où deux fonctions de séparation peuvent être utilisées, dont l'une d'elle est effectivement l'inverse de la racine carrée du rayon de révolution à la puissance $N-1$. De plus dans tous les exemples suivant $N-1$ sera à chaque remplacé par 2λ .

Exemple de R-séparabilité : système hyper-toroïdal

Ce sont essentiellement les mêmes calculs que ceux déjà effectués pour le systèmes toroïdal en 3 dimensions. La fonction de révolution s'écrit comme suit :

$$\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2} \quad x_0 + i\rho = f(\xi + i\eta) = c \operatorname{Cotan}\left(-i \frac{\xi + i\eta}{2}\right) = i c \operatorname{Cotanh}\left(\frac{\xi + i\eta}{2}\right)$$

$$\rightarrow \overline{x_0 + i\rho} = x_0 - i\rho = \overline{f(\xi + i\eta)} = f(\xi - i\eta) \Rightarrow \rho = \frac{f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta)}{2i} \quad (f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta))^2 = -4\rho^2$$

$$x_0 + i\rho = i c \operatorname{Cotanh}\left(\frac{\xi + i\eta}{2}\right) = c \frac{\operatorname{Sin}(\eta) + i \operatorname{Sinh}(\xi)}{\operatorname{Cosh}(\xi) - \operatorname{Cos}(\eta)} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = c \frac{\operatorname{Sin}(\eta)}{\operatorname{Cosh}(\xi) - \operatorname{Cos}(\eta)} \\ \rho = c \frac{\operatorname{Sinh}(\xi)}{\operatorname{Cosh}(\xi) - \operatorname{Cos}(\eta)} \end{cases}$$

Les éléments de calcul pour la R-Séparabilité sont les suivants :

$$x_0 + i\rho = f(\xi + i\eta) = i c \operatorname{Cotanh}\left(\frac{\xi + i\eta}{2}\right) \Rightarrow f'(\xi + i\eta) = -\frac{c}{2 \operatorname{Sinh}^2\left(\frac{\xi + i\eta}{2}\right)} \quad f'(\xi - i\eta) = -\frac{c}{2 \operatorname{Sinh}^2\left(\frac{\xi - i\eta}{2}\right)}$$

$$f'(\xi + i\eta) f'(\xi - i\eta) = \frac{c^2}{(\operatorname{Cosh}(\xi) - \operatorname{Cos}(\eta))^2} \quad \rho = c \frac{\operatorname{Sinh}(\xi)}{\operatorname{Cosh}(\xi) - \operatorname{Cos}(\eta)} \Rightarrow (f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta))^2 = -4\rho^2 = -4\gamma^2 \frac{\operatorname{Sinh}^2(\xi)}{(\operatorname{Cosh}(\xi) - \operatorname{Cos}(\eta))^2}$$

$$\Rightarrow \frac{f'(\eta + i\theta) f'(\eta - i\theta)}{(f(\eta + i\theta) - f(\eta - i\theta))^2} = -\frac{1}{4 \operatorname{Sinh}^2(\xi)} = \chi_1(\xi) + \chi_2(\eta) \Rightarrow \chi_1(\xi) = -\frac{1}{4 \operatorname{Sinh}^2(\xi)} \quad \text{et} \quad \chi_2(\eta) = 0$$

De plus la fonction de R-Séparation est choisie comme suit :

$$\rho^{N-1} R^2(\xi, \eta) = e^{\int d\xi F_1(\xi)} e^{\int d\eta F_2(\eta)} \quad \text{et} \quad \rho = c \frac{\operatorname{Sinh}(\xi)}{\operatorname{Cosh}(\xi) - \operatorname{Cos}(\eta)}$$

$$\Rightarrow R^2(\xi, \eta) = (\operatorname{Cosh}(\xi) - \operatorname{Cos}(\eta))^{N-1} \Rightarrow R(\eta, \theta) = (\operatorname{Cosh}(\xi) - \operatorname{Cos}(\eta))^{\frac{N-1}{2}} \Rightarrow \rho^{N-1} R^2(\xi, \eta) = c^{N-1} \operatorname{Sinh}^{N-1}(\xi)$$

$$\Rightarrow e^{\int d\eta F_2(\eta)} = 1 \Rightarrow F_2(\eta) = 0 \quad e^{\int d\xi F_1(\xi)} = c^{N-1} \operatorname{Sinh}^{N-1}(\eta)$$

$$\Rightarrow \int d\xi F_1(\xi) = (N-1) \operatorname{Log}(\operatorname{Sinh}(\xi)) + (N-1) \operatorname{Log}(c) \Rightarrow F_1(\xi) = (N-1) \operatorname{Cotanh}(\xi) \Rightarrow F_1'(\xi) = -\frac{N-1}{\operatorname{Sinh}^2(\xi)}$$

On obtient alors les équations séparées suivantes :

$$\begin{cases} \Xi''(\xi) + F_1(\xi) \Xi'(\xi) + \left((4\mu(\mu + 2\lambda - 1) - 4\lambda(1 - \lambda)) \chi_1(\xi) + \frac{F_1'(\xi)}{2} + \frac{F_1^2(\xi)}{4} - \alpha \right) \Xi(\xi) = 0 \\ H''(\eta) + F_2(\eta) H'(\eta) + \left((4\mu(\mu + 2\lambda - 1) - 4\lambda(1 - \lambda)) \chi_2(\eta) + \frac{F_2'(\eta)}{2} + \frac{F_2^2(\eta)}{4} + \alpha \right) H(\eta) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Xi''(\xi) + 2\lambda \operatorname{Cotanh}(\xi) \Xi'(\xi) + \left(\frac{4\lambda(1 - \lambda) - 4\mu(\mu + 2\lambda - 1)}{4 \operatorname{Sinh}^2(\xi)} - \frac{2\lambda}{2 \operatorname{Sinh}^2(\xi)} + \frac{4\lambda^2 \operatorname{Cotanh}^2(\xi)}{4} - \alpha \right) \Xi(\xi) = 0 \\ H''(\eta) + \alpha H(\eta) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Xi''(\xi) + 2\lambda \operatorname{Cotanh}(\xi) \Xi'(\xi) + \left(\lambda^2 - \alpha - \frac{\mu(\mu + 2\lambda - 1)}{\operatorname{Sinh}^2(\xi)} \right) \Xi(\xi) = 0 \\ H''(\eta) + \alpha H(\eta) = 0 \end{cases}$$

$$\text{En posant} \quad \begin{cases} \tilde{\alpha} = \alpha - \lambda^2 \\ \text{Communément } \tilde{\alpha} = \nu(\nu + 2\lambda) \Rightarrow \begin{cases} \Xi''(\xi) + 2\lambda \operatorname{Cotanh}(\xi) \Xi'(\xi) - \left\{ \tilde{\alpha} + \frac{\mu(\mu + 2\lambda - 1)}{\operatorname{Sinh}^2(\xi)} \right\} \Xi(\xi) = 0 \\ H''(\eta) + (\tilde{\alpha} + \lambda^2) H(\eta) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Solution} \quad T(\xi, \eta, \Theta) = (\operatorname{Cosh}(\xi) - \operatorname{Cos}(\eta))^{\frac{N-1}{2}} \Xi(\xi) H(\eta) \Omega(\Theta)$$

Avec le choix de la fonction de séparation comme inverse de la racine carrée du rayon de révolution à la puissance $N-1$, on obtient d'autres équations séparées, il vient la R-Séparabilité-2 :

$$R(\xi, \eta) \propto \rho^{\frac{1-N}{2}} \Rightarrow R(\xi, \eta) = \left(\frac{\cosh(\xi) - \cos(\eta)}{\sinh(\xi)} \right)^{\frac{N-1}{2}} \quad \chi_1(\xi) = -\frac{1}{4\sinh^2(\xi)} \quad \text{et} \quad \chi_2(\eta) = 0 \quad F_1(\xi) = F_2(\eta) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Xi''(\xi) + \left\{ \frac{\lambda(1-\lambda) - \mu(\mu+2\lambda-1)}{\sinh^2(\xi)} - \alpha \right\} \Xi(\xi) = 0 \\ H''(\eta) + \alpha H(\eta) = 0 \end{cases} \quad \text{Solution} \quad T(\xi, \eta, \Theta) = \left(\frac{\cosh(\xi) - \cos(\eta)}{\sinh(\xi)} \right)^{\frac{N-1}{2}} \Xi(\xi) H(\eta) \Omega(\Theta)$$

De plus $\mu(\mu+2\lambda-1) - \lambda(1-\lambda) = (\mu+\lambda)(\mu+\lambda-1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Xi''(\xi) + \left\{ -\frac{(\mu+\lambda)(\mu+\lambda-1)}{\sinh^2(\xi)} - \alpha \right\} \Xi(\xi) = 0 \\ H''(\eta) + \alpha H(\eta) = 0 \end{cases}$$

Exemple de R-séparabilité : système « Bi-hyper-sphérique »

Dans ce cas les calculs de R-séparabilité donnent d'après la forme de la fonction révolution donne :

$$\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2} \quad x_0 + i\rho = f(\xi - i\eta) = c \operatorname{Cotanh}\left(\frac{\xi - i\eta}{2}\right) \rightarrow \overline{x_0 + i\rho} = x_0 - i\rho = \overline{f(\xi - i\eta)} = f(\xi + i\eta)$$

$$\Rightarrow x_0 + i\rho = c \operatorname{Cotanh}\left(\frac{\xi - i\eta}{2}\right) = \gamma \frac{\sinh(\xi) + i\sin(\eta)}{\cosh(\xi) - \cos(\eta)} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = c \frac{\sinh(\xi)}{\cosh(\xi) - \cos(\eta)} \\ \rho = c \frac{\sin(\eta)}{\cosh(\xi) - \cos(\eta)} \end{cases}$$

$$x_0 + i\rho = f(\xi - i\eta) = \gamma \operatorname{Cotanh}\left(\frac{\xi - i\eta}{2}\right) \quad f'(\xi - i\eta) = -\frac{\gamma}{2\sinh^2\left(\frac{\xi - i\eta}{2}\right)} \quad f'(\xi + i\eta) = -\frac{\gamma}{2\sinh^2\left(\frac{\xi + i\eta}{2}\right)}$$

$$f'(\xi + i\eta)f'(\xi - i\eta) = \frac{\gamma^2}{4\sinh^2\left(\frac{\xi + i\eta}{2}\right)\sinh^2\left(\frac{\xi - i\eta}{2}\right)} = \frac{\gamma^2}{(\cosh(\xi) - \cos(\eta))^2}$$

$$(f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta))^2 = -4\rho^2 = -4\gamma^2 \frac{\sin^2(\eta)}{(\cosh(\xi) - \cos(\eta))^2}$$

$$\frac{f'(\xi + i\eta)f'(\xi - i\eta)}{(f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta))^2} = -\frac{1}{4\sin^2(\eta)} = \chi_1(\xi) + \chi_2(\eta) \Rightarrow \chi_1(\xi) = 0 \quad \text{et} \quad \chi_2(\eta) = -\frac{1}{4\sin^2(\eta)}$$

De plus la fonction de R-Séparation est choisie comme suit :

$$\rho^{N-1} R^2(\xi, \eta) = e^{\int d\xi F_1(\xi)} e^{\int d\eta F_2(\eta)} \quad \text{et} \quad \rho = c \frac{\sin(\eta)}{\cosh(\xi) - \cos(\eta)}$$

$$\Rightarrow R^2(\xi, \eta) = (\cosh(\xi) - \cos(\eta))^{N-1} \Rightarrow R(\xi, \eta) = (\cosh(\xi) - \cos(\eta))^{\frac{N-1}{2}} \Rightarrow \rho^{N-1} R^2(\xi, \eta) = c \sin^{N-1}(\eta)$$

$$\Rightarrow e^{\int d\xi F_1(\xi)} = 1 \Rightarrow F_1(\xi) = F_1'(\eta) = 0$$

$$\Rightarrow \int d\eta F_2(\eta) = (N-1)(\log(\sin(\eta)) + \log(c)) \Rightarrow F_2(\eta) = (N-1)\operatorname{Cotan}(\eta) \Rightarrow F_2'(\eta) = -\frac{N-1}{\sin^2(\eta)}$$

On obtient alors les équations séparées suivantes :

$$\begin{cases} \Xi''(\xi) + F_1(\xi) \Xi'(\xi) + \left((4\mu(\mu + 2\lambda - 1) - 4\lambda(1 - \lambda)) \chi_1(\xi) + \frac{F_1'(\xi)}{2} + \frac{F_1^2(\xi)}{4} - \alpha \right) \Xi(\xi) = 0 \\ H''(\eta) + F_2(\eta) H'(\eta) + \left((4\mu(\mu + 2\lambda - 1) - 4\lambda(1 - \lambda)) \chi_2(\eta) + \frac{F_2'(\eta)}{2} + \frac{F_2^2(\eta)}{4} + \alpha \right) H(\eta) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Xi''(\xi) - \alpha \Xi(\xi) = 0 \\ H''(\eta) + (N-1) \text{Cotan}(\eta) H'(\eta) + \left\{ \frac{4\lambda(1-\lambda) - 4\mu(\mu + 2\lambda - 1)}{4 \text{Sin}^2(\eta)} - \frac{1}{2 \text{Sin}^2(\eta)} + 4\lambda^2 \frac{\text{Cotan}^2(\eta)}{4} + \alpha \right\} H(\eta) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Xi''(\xi) - \alpha \Xi(\xi) = 0 \\ H''(\eta) + 2\lambda \text{Cotan}(\eta) H'(\eta) + \left\{ \alpha - \lambda^2 - \frac{\mu(\mu + 2\lambda - 1)}{\text{Sin}^2(\eta)} \right\} H(\eta) = 0 \end{cases}$$

En posant $\tilde{\alpha} = \alpha - \lambda^2$ communément $\tilde{\alpha} = \nu(\nu + 2\lambda) \Rightarrow \begin{cases} \Xi''(\xi) - \{\tilde{\alpha} + \lambda^2\} H(\eta) = 0 \\ H''(\eta) + 2\lambda \text{Cotan}(\eta) H'(\eta) + \left\{ \tilde{\alpha} - \frac{\mu(\mu + 2\lambda - 1)}{\text{Sin}^2(\eta)} \right\} H(\eta) = 0 \end{cases}$

Solution $T(\xi, \eta, \Theta) = (\text{Cosh}(\xi) - \text{Cos}(\eta))^{\frac{N-1}{2}} \Xi(\xi) H(\eta) \Omega(\Theta)$

Avec le choix de la fonction de séparation comme inverse de la racine carrée du rayon de révolution à la puissance N-1, on obtient d'autres équations séparées, il vient la R-Séparabilité-2 :

$$R(\xi, \eta) \propto \frac{1}{\rho^{\frac{N-1}{2}}} \Rightarrow R(\xi, \eta) = \left(\frac{\text{Cosh}(\xi) - \text{Cos}(\eta)}{\text{Sin}(\eta)} \right)^{\frac{N-1}{2}} \quad \chi_1(\xi) = 0 \quad \text{et} \quad \chi_2(\eta) = -\frac{1}{4 \text{Sin}^2(\eta)} \quad F_1(\xi) = F_2(\eta) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Xi''(\xi) - \alpha \Xi(\xi) = 0 \\ H''(\eta) + \left\{ -\frac{(\mu + \lambda)(\mu + \lambda - 1)}{\text{Sin}^2(\eta)} + \alpha \right\} H(\eta) = 0 \end{cases} \quad \text{Solution} \quad T(\xi, \eta, \Theta) = \left(\frac{\text{Cosh}(\xi) - \text{Cos}(\eta)}{\text{Sin}(\eta)} \right)^{\frac{N-1}{2}} \Xi(\xi) H(\eta) \Omega(\Theta)$$

Exemple de R-séparabilité : coordonnées inverses hyper-sphéroidales allongées

Dans ce cas la fonction a la forme :

$$x_0 + i\rho = \frac{\gamma}{\text{Cosh}(\xi - i\eta)} = \gamma \frac{\text{Cos}(\eta) \text{Cosh}(\xi) + i \text{Sin}(\eta) \text{Sinh}(\xi)}{\text{Cosh}^2(\xi) - \text{Sin}^2(\eta)} \rightarrow \overline{x_0 + i\rho} = x_0 - i\rho = \overline{f(\xi - i\eta)} = f(\xi + i\eta)$$

$$x_0 = \gamma \frac{\text{Cosh}(\xi) \text{Cos}(\eta)}{\text{Cosh}^2(\xi) - \text{Sin}^2(\eta)} \quad \rho = \gamma \frac{\text{Sinh}(\xi) \text{Sin}(\eta)}{\text{Cosh}^2(\xi) - \text{Sin}^2(\eta)}$$

Les calculs de R-Séparabilité donnent :

$$f(\xi - i\eta) = \frac{\gamma}{\text{Cosh}(\xi - i\eta)} \quad f'(\eta - i\theta) = -\gamma \frac{\text{Sinh}(\xi - i\eta)}{\text{Cosh}^2(\xi - i\eta)} \quad f'(\eta + i\theta) = -\gamma \frac{\text{Sinh}(\xi + i\eta)}{\text{Cosh}^2(\xi + i\eta)}$$

$$\begin{cases} f'(\xi + i\eta) f'(\xi - i\eta) = \gamma^2 \frac{\text{Cosh}^2(\xi) - \text{Cos}^2(\eta)}{(\text{Cosh}^2(\xi) - \text{Sin}^2(\eta))^2} \\ (f(\eta + i\theta) - f(\eta - i\theta))^2 = -4\gamma^2 \frac{\text{Sinh}^2(\xi) \text{Sin}^2(\eta)}{(\text{Cosh}^2(\xi) - \text{Sin}^2(\eta))^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{f'(\xi + i\eta) f'(\xi - i\eta)}{(f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta))^2} = \frac{1}{4} \frac{\text{Cos}^2(\eta) - \text{Cosh}^2(\xi)}{\text{Sinh}^2(\xi) \text{Sin}^2(\eta)}$$

$$\Rightarrow \chi_1(\xi) = -\frac{1}{4 \text{Sinh}^2(\xi)} \quad \chi_2(\eta) = -\frac{1}{4 \text{Sin}^2(\eta)}$$

De plus la fonction de R-Séparation est choisie comme suit :

$$\rho^{N-1} R^2(\xi, \eta) = e^{\int d\xi F_1(\xi)} e^{\int d\eta F_2(\eta)} \quad \text{et} \quad \rho = c \frac{\text{Sinh}(\xi) \text{Sin}(\eta)}{\text{Cosh}^2(\xi) - \text{Sin}^2(\eta)}$$

$$\Rightarrow R^2(\xi, \eta) = (\text{Cosh}^2(\xi) - \text{Cos}^2(\eta))^{N-1} \Rightarrow R(\xi, \eta) = (\text{Cosh}^2(\xi) - \text{Cos}^2(\eta))^{\frac{N-1}{2}} \Rightarrow \rho^{N-1} R^2(\xi, \eta) = c \text{Sinh}^{N-1}(\xi) \text{Sin}^{N-1}(\eta)$$

$$\Rightarrow \int d\xi F_1(\xi) = (N-1)(\text{Log}(\text{Sinh}(\xi)) + \text{Log}(c)) \Rightarrow F_1(\xi) = (N-1)\text{Cotanh}(\xi) \Rightarrow F_1'(\xi) = -\frac{N-1}{\text{Sinh}^2(\xi)}$$

$$\Rightarrow \int d\eta F_2(\eta) = (N-1)(\text{Log}(\text{Sin}(\eta)) + \text{Log}(c)) \Rightarrow F_2(\eta) = (N-1)\text{Cotan}(\eta) \Rightarrow F_2'(\eta) = -\frac{N-1}{\text{Sin}^2(\eta)}$$

On obtient alors les équations séparées suivantes :

$$\begin{cases} \Xi''(\xi) + F_1(\xi) \Xi'(\xi) + \left((4\mu(\mu+2\lambda-1) - 4\lambda(1-\lambda)) \chi_1(\xi) + \frac{F_1'(\xi)}{2} + \frac{F_1^2(\xi)}{4} - \alpha \right) \Xi(\xi) = 0 \\ H''(\eta) + F_2(\eta) H'(\eta) + \left((4\mu(\mu+2\lambda-1) - 4\lambda(1-\lambda)) \chi_2(\eta) + \frac{F_2'(\eta)}{2} + \frac{F_2^2(\eta)}{4} + \alpha \right) H(\eta) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Xi''(\xi) + 2\lambda \text{Cotanh}(\xi) \Xi'(\xi) + \left\{ \lambda^2 - \frac{\mu(\mu+2\lambda-1)}{\text{Sinh}^2(\xi)} - \alpha \right\} \Xi(\xi) = 0 \\ H''(\eta) + 2\lambda \text{Cotan}(\eta) H'(\eta) + \left\{ -\lambda^2 - \frac{\mu(\mu+2\lambda-1)}{\text{Sin}^2(\eta)} + \alpha \right\} H(\eta) = 0 \end{cases} \quad \text{En posant } \tilde{\alpha} = \alpha - \lambda^2 \quad \text{communément } \alpha = \nu(\nu+2\lambda)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Xi''(\xi) + 2\lambda \text{Cotanh}(\xi) \Xi'(\xi) - \left\{ \tilde{\alpha} + \frac{\mu(\mu+2\lambda-1)}{\text{Sinh}^2(\xi)} \right\} \Xi(\xi) = 0 \\ H''(\eta) + 2\lambda \text{Cotan}(\eta) H'(\eta) + \left\{ \tilde{\alpha} - \frac{\mu(\mu+2\lambda-1)}{\text{Sin}^2(\eta)} \right\} H(\eta) = 0 \end{cases} \quad \text{Solution } T(\xi, \eta, \Theta) = (\text{Cosh}^2(\xi) - \text{Cos}^2(\eta))^{\frac{N-1}{2}} \Xi(\xi) H(\eta) \Omega(\Theta)$$

Avec le choix de la fonction de séparation comme inverse de la racine carrée du rayon de révolution à la puissance N-1, on obtient d'autres équations séparées, il vient la R-Séparabilité-2 :

$$R(\xi, \eta) \propto \frac{1}{\sqrt{\rho^{N-1}}} \Rightarrow R(\xi, \eta) = \left(\frac{\text{Cosh}^2(\xi) - \text{Sin}^2(\eta)}{\text{Sinh}(\xi) \text{Sin}(\eta)} \right)^{\frac{N-1}{2}} \quad \chi_1(\xi) = -\frac{1}{4\text{Sinh}^2(\xi)} \quad \text{et} \quad \chi_2(\eta) = -\frac{1}{4\text{Sin}^2(\eta)} \quad F_1(\xi) = F_2(\eta) = 0$$

$$\begin{cases} \Xi''(\xi) + \left\{ -\frac{(\mu+\lambda)(\mu+\lambda-1)}{\text{Sinh}^2(\xi)} - \alpha \right\} \Xi(\xi) = 0 \\ H''(\eta) + \left\{ -\frac{(\mu+\lambda)(\mu+\lambda-1)}{\text{Sin}^2(\eta)} + \alpha \right\} H(\eta) = 0 \end{cases} \quad \text{Solution } T(\xi, \eta, \Theta) = \left(\frac{\text{Cosh}^2(\xi) - \text{Sin}^2(\eta)}{\text{Sinh}(\xi) \text{Sin}(\eta)} \right)^{\frac{N-1}{2}} \Xi(\xi) H(\eta) \Omega(\Theta)$$

Exemple de R-séparabilité : coordonnées inverses hyper-sphéroïdales aplaties

Dans ce cas la fonction de révolution a la forme :

$$x_0 + i\rho = \frac{c}{\sinh(\xi - i\eta)} = c \frac{\cosh(\xi) \sinh(\eta) + i \cosh(\xi) \sin(\eta)}{\cosh^2(\xi) - \cos^2(\eta)} \rightarrow \overline{x_0 + i\rho} = x_0 - i\rho = \overline{f(\xi - i\eta)} = f(\xi + i\eta)$$

$$\Rightarrow x_0 = c \frac{\cosh(\xi) \sinh(\eta)}{\cosh^2(\xi) - \cos^2(\eta)} \quad \rho = c \frac{\cosh(\xi) \sin(\eta)}{\cosh^2(\xi) - \cos^2(\eta)}$$

Les calculs de R-Séparabilité donnent :

$$f(\xi - i\eta) = \frac{c}{\sinh(\xi - i\eta)} \quad f'(\xi - i\eta) = -c \frac{\cosh(\xi - i\eta)}{\sinh^2(\xi - i\eta)} \quad f'(\xi + i\eta) = -\gamma \frac{\cosh(\xi + i\eta)}{\sinh^2(\xi + i\eta)}$$

$$\begin{cases} f'(\xi + i\eta) f'(\xi - i\eta) = c^2 \frac{\cosh^2(\xi) - \sin^2(\eta)}{(\cosh^2(\xi) - \cos^2(\eta))^2} \\ (f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta))^2 = -4\gamma^2 \frac{\sin^2(\eta) \cosh^2(\xi)}{(\cosh^2(\xi) - \cos^2(\eta))^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{f'(\xi + i\eta) f'(\xi - i\eta)}{(f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta))^2} = \frac{1}{4} \frac{\sin^2(\eta) - \cosh^2(\xi)}{\cosh^2(\xi) \sin^2(\eta)}$$

$$\Rightarrow \chi_1(\xi) = \frac{1}{4\cosh^2(\xi)} \quad \chi_2(\eta) = -\frac{1}{4\sin^2(\eta)}$$

De plus la fonction de R-Séparation est choisie comme suit :

$$\rho^{N-1} R^2(\xi, \eta) = e^{\int d\xi F_1(\xi)} e^{\int d\eta F_2(\eta)} \quad \text{et} \quad \rho \frac{\cosh(\xi) \sin(\eta)}{\cosh^2(\xi) - \cos^2(\eta)} \quad R(\xi, \eta) = (\cosh^2(\xi) - \cos^2(\eta))^{\frac{N-1}{2}}$$

$$\Rightarrow \rho^{N-1} R^2(\xi, \eta) = c^{N-1} \cosh^{N-1}(\xi) \sin^{N-1}(\eta)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int d\xi F_1(\xi) = (N-1) (\log(\cosh(\xi)) + \log(c)) \Rightarrow F_1(\xi) = (N-1) \tanh(\xi) \\ \int d\eta F_2(\eta) = (N-1) \log(\sin(\eta)) \Rightarrow F_2(\eta) = (N-1) \cotan(\eta) \end{cases} \Rightarrow F_1'(\xi) = \frac{N-1}{\cosh^2(\xi)} \quad F_2'(\eta) = -\frac{N-1}{\sin^2(\eta)}$$

On obtient alors les équations séparées suivantes :

$$\begin{cases} \Xi''(\xi) + F_1(\xi) \Xi'(\xi) + \left((4\mu(\mu + 2\lambda - 1) - 4\lambda(1 - \lambda)) \chi_1(\xi) + \frac{F_1'(\xi)}{2} + \frac{F_1^2(\xi)}{4} - \alpha \right) \Xi(\xi) = 0 \\ H''(\eta) + F_2(\eta) H'(\eta) + \left((4\mu(\mu + 2\lambda - 1) - 4\lambda(1 - \lambda)) \chi_2(\eta) + \frac{F_2'(\eta)}{2} + \frac{F_2^2(\eta)}{4} + \alpha \right) H(\eta) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Xi''(\xi) + 2\lambda \tanh(\xi) \Xi'(\xi) + \left\{ \frac{\mu(\mu + 2\lambda - 1)}{\cosh^2(\xi)} + \lambda^2 - \alpha \right\} \Xi(\xi) = 0 \\ H''(\eta) + 2\lambda \cotan(\eta) H'(\eta) + \left\{ \alpha - \lambda^2 - \frac{\mu(\mu + 2\lambda - 1)}{\sin^2(\eta)} \right\} H(\eta) = 0 \end{cases} \quad \tilde{\alpha} = \alpha - \lambda^2 \quad \text{communément } \tilde{\alpha} = \nu(\nu + 2\lambda)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Xi''(\xi) + 2\lambda \tanh(\xi) \Xi'(\xi) + \left\{ \frac{\mu(\mu + 2\lambda - 1)}{\cosh^2(\xi)} - \tilde{\alpha} \right\} \Xi(\xi) = 0 \\ H''(\eta) + 2\lambda \cotan(\eta) H'(\eta) + \left\{ \tilde{\alpha} - \frac{\mu(\mu + 2\lambda - 1)}{\sin^2(\eta)} \right\} H(\eta) = 0 \end{cases} \quad \text{Solution} \quad T(\xi, \eta, \Theta) = (\cosh^2(\xi) - \cos^2(\eta))^{\frac{N-1}{2}} \Xi(\xi) H(\eta) \Omega(\Theta)$$

Avec le choix de la fonction de séparation comme inverse de la racine carrée du rayon de révolution à la puissance $N-1$, on obtient d'autres équations séparées, il vient la R-Séparabilité-2 :

$$R(\xi, \eta) \propto \frac{1}{\sqrt{\rho^{N-1}}} \Rightarrow R(\xi, \eta) = \left(\frac{\cosh^2(\xi) - \cos^2(\eta)}{\cosh(\xi) \sin(\eta)} \right)^{\frac{N-1}{2}} \quad \chi_1(\xi) = \frac{1}{4 \cosh^2(\xi)} \quad \text{et} \quad \chi_2(\eta) = -\frac{1}{4 \sin^2(\eta)} \quad F_1(\xi) = F_2(\eta) = 0$$

$$\begin{cases} \Xi''(\xi) + \left\{ \frac{(\mu + \lambda)(\mu + \lambda - 1)}{\cosh^2(\xi)} - \alpha \right\} \Xi(\xi) = 0 \\ H''(\eta) + \left\{ -\frac{(\mu + \lambda)(\mu + \lambda - 1)}{\sin^2(\eta)} + \alpha \right\} H(\eta) = 0 \end{cases} \quad \text{Solution} \quad T(\xi, \eta, \Theta) = \left(\frac{\cosh^2(\xi) - \cos^2(\eta)}{\cosh(\xi) \sin(\eta)} \right)^{\frac{N-1}{2}} \Xi(\xi) H(\eta) \Omega(\Theta)$$

Exemple de R-séparabilité : le système Hyper-cardioïde de révolution ou « hyper-parabolique de révolution inversé »

Dans ce cas la fonction a la forme :

$$f(\xi - i\eta) = \frac{c}{2(\xi - i\eta)^2} = \frac{c}{2((\xi^2 - \eta^2) - 2i\xi\eta)} = \frac{c((\xi^2 - \eta^2) + 2i\xi\eta)}{2(\xi^2 + \eta^2)^2} \Rightarrow f(\xi - i\eta) = \frac{c((\xi^2 - \eta^2) + 2i\xi\eta)}{2(\xi^2 + \eta^2)^2}$$

$$x_0 = c \frac{(\xi^2 - \eta^2)}{2(\xi^2 + \eta^2)^2} \quad \rho = c \frac{\xi\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^2}$$

Les calculs des fonctions de séparation donnent :

$$f(\xi - i\eta) = \frac{c}{2(\xi - i\eta)^2} \quad f'(\xi - i\eta) = -\frac{c}{(\xi - i\eta)^3} \quad f'(\xi + i\eta) = -\frac{c}{(\xi + i\eta)^3} \quad f'(\xi - i\eta)f'(\xi + i\eta) = \frac{c^2}{(\xi^2 + \eta^2)^3}$$

$$\rho = c \frac{\xi\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^2} \Rightarrow (f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta))^2 = -4c^2 \frac{\xi^2 \eta^2}{(\xi^2 + \eta^2)^4} \Rightarrow \frac{f'(\xi + i\eta)f'(\xi - i\eta)}{(f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta))^2} = -\frac{1}{4} \left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{\xi^2 \eta^2} \right)$$

$$\Rightarrow \chi_1(\xi) = -\frac{1}{4\xi^2} \quad \chi_2(\eta) = -\frac{1}{4\eta^2}$$

De plus la fonction de R-Séparation est choisie comme suit :

$$\rho^{N-1} R^2(\xi, \eta) = e^{\int d\xi F_1(\xi)} e^{\int d\eta F_2(\eta)} \quad \text{et} \quad \rho = c \frac{\xi\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^2} \quad \text{si} \quad R(\xi, \eta) = (\xi^2 + \eta^2)^{N-1}$$

$$\Rightarrow \rho^{N-1} R^2(\xi, \eta) = c^{N-1} \xi^{N-1} \eta^{N-1} \Rightarrow e^{\int d\xi F_1(\xi)} = c \xi^{N-1} \quad e^{\int d\eta F_2(\eta)} = \eta^{N-1}$$

$$\Rightarrow \int d\xi F_1(\xi) = (N-1)(\text{Log}(\xi) + \text{Log}(c)) \Rightarrow F_1(\eta) = \frac{N-1}{\xi}$$

$$\Rightarrow \int d\eta F_2(\eta) = (N-1)\text{Log}(\eta) \Rightarrow F_2(\eta) = \frac{N-1}{\eta} \Rightarrow F_1'(\xi) = -\frac{N-1}{\xi^2} \quad F_2'(\eta) = -\frac{N-1}{\eta^2}$$

On obtient alors les équations séparées suivantes :

$$\begin{cases} \Xi''(\xi) + F_1(\xi) \Xi'(\xi) + \left((4\mu(\mu + 2\lambda - 1) - 4\lambda(1 - \lambda)) \chi_1(\xi) + \frac{F_1'(\xi)}{2} + \frac{F_1^2(\xi)}{4} - \alpha \right) \Xi(\xi) = 0 \\ H''(\eta) + F_2(\eta) H'(\eta) + \left((4\mu(\mu + 2\lambda - 1) - 4\lambda(1 - \lambda)) \chi_2(\eta) + \frac{F_2'(\eta)}{2} + \frac{F_2^2(\eta)}{4} + \alpha \right) H(\eta) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Xi''(\xi) + \frac{N-1}{\xi} \Xi'(\xi) - \left\{ \alpha + \frac{\mu(\mu + 2\lambda - 1)}{\xi^2} \right\} \Xi(\xi) = 0 \\ H''(\eta) + \frac{N-1}{\eta} H'(\eta) + \left\{ \alpha - \frac{\mu(\mu + 2\lambda - 1)}{\eta^2} \right\} H(\eta) = 0 \end{cases} \quad \text{Solution} \quad T(\xi, \eta, \Theta) = (\xi^2 + \eta^2)^{\frac{N-1}{2}} \Xi(\xi) H(\eta) \Omega(\Theta)$$

Avec le choix de la fonction de séparation comme inverse de la racine carrée du rayon de révolution à la puissance $N-1$, on obtient d'autres équations séparées, il vient la R-Séparabilité-2 :

$$R(\xi, \eta) \propto \frac{1}{\sqrt{\rho^{N-1}}} \Rightarrow R(\xi, \eta) = \frac{(\xi^2 + \eta^2)^{N-1}}{\sqrt{\xi^{N-1} \eta^{N-1}}} \quad \chi_1(\xi) = -\frac{1}{4\eta^2} \quad \text{et} \quad \chi_2(\eta) = -\frac{1}{4\eta^2} \quad F_1(\xi) = F_2(\eta) = 0$$

$$\begin{cases} \Xi''(\xi) + \left\{ -\frac{(\mu + \lambda)(\mu + \lambda - 1)}{\xi^2} - \alpha \right\} \Xi(\xi) = 0 \\ H''(\eta) + \left\{ -\frac{(\mu + \lambda)(\mu + \lambda - 1)}{\eta^2} + \alpha \right\} H(\eta) = 0 \end{cases} \quad \text{Solution} \quad T(\xi, \eta, \Theta) = \frac{(\xi^2 + \eta^2)^{N-1}}{\sqrt{\xi^{N-1} \eta^{N-1}}} \Xi(\xi) H(\eta) \Omega(\Theta)$$

Exemple de R-séparabilité : le système « hyper-cylindrique inversé »

Dans ce cas la fonction de révolution et les calculs des fonctions de séparabilité donnent :

$$f(\xi - i\eta) = \frac{c}{\xi - i\eta} = c \frac{\xi + i\eta}{\xi^2 + \eta^2} = x_0 + i\rho \quad f'(\xi - i\eta) = -\frac{c}{(\xi - i\eta)^2} \quad f'(\xi + i\eta) = -\frac{c}{(\xi + i\eta)^2}$$

$$f'(\xi + i\eta)f'(\xi - i\eta) = \frac{c^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2} \quad \rho = c \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2} \Rightarrow (f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta))^2 = -4c^2 \frac{\eta^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2}$$

$$\frac{f'(\xi + i\eta)f'(\xi - i\eta)}{(f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta))^2} = -\frac{1}{4\eta^2} = \chi_1(\xi) + \chi_2(\eta) \Rightarrow \chi_1(\xi) = 0 \quad \chi_2(\eta) = -\frac{1}{4\eta^2}$$

De plus la fonction de R-Séparation est choisie comme suit :

$$\rho^{N-1} R^2(\xi, \eta) = e^{\int d\xi F_1(\xi)} e^{\int d\eta F_2(\eta)} \quad \text{et} \quad \rho = c \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2} \Rightarrow R(\xi, \eta) = (\xi^2 + \eta^2)^{\frac{N-1}{2}}$$

$$\Rightarrow e^{\int d\eta F_1(\eta)} = 1 \Rightarrow \int d\xi F_1(\xi) = 1 \Rightarrow F_1(\xi) = F_1'(\xi) = 0$$

$$\Rightarrow \rho^{N-1} R^2(\xi, \eta) = e^{\int d\eta F_2(\eta)} = c^{N-1} \theta^{N-1} \Rightarrow \int d\eta F_2(\eta) = (N-1)(\text{Log}(\eta) + \text{Log}(c)) \Rightarrow F_2(\eta) = \frac{N-1}{\eta} \Rightarrow F_2'(\eta) = -\frac{N-1}{\eta^2}$$

On obtient alors les équations séparées suivantes :

$$\begin{cases} \Xi''(\xi) + F_1(\xi) \Xi'(\xi) + \left((4\mu(\mu + 2\lambda - 1) - 4\lambda(1 - \lambda))\chi_1(\xi) + \frac{F_1'(\xi)}{2} + \frac{F_1^2(\xi)}{4} - \alpha \right) \Xi(\xi) = 0 \\ H''(\eta) + F_2(\eta) H'(\eta) + \left((4\mu(\mu + 2\lambda - 1) - 4\lambda(1 - \lambda))\chi_2(\eta) + \frac{F_2'(\eta)}{2} + \frac{F_2^2(\eta)}{4} + \alpha \right) H(\eta) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Xi''(\xi) - \alpha \Xi(\xi) = 0 \\ H''(\eta) + \frac{2\lambda}{\eta} H'(\eta) - \left\{ \frac{\mu(\mu + 2\lambda - 1)}{\eta^2} - \alpha \right\} H(\eta) = 0 \end{cases} \quad \text{Solution} \quad T(\xi, \eta, \Theta) = (\xi^2 + \eta^2)^{\frac{N-1}{2}} \Xi(\xi) H(\eta) \Omega(\Theta)$$

Avec le choix de la fonction de séparation comme inverse de la racine carrée du rayon de révolution à la puissance $N-1$, on obtient d'autres équations séparées, il vient la R-Séparabilité-2 :

$$R(\xi, \eta) \propto \frac{1}{\sqrt{\rho^{N-1}}} \Rightarrow R(\xi, \eta) = \left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{\eta} \right)^{\frac{N-1}{2}} \quad \chi_1(\xi) = 0 \quad \text{et} \quad \chi_2(\eta) = -\frac{1}{4\eta^2} \quad F_1(\xi) = F_2(\eta) = 0$$

$$\begin{cases} \Xi''(\xi) - \alpha \Xi(\xi) = 0 \\ H''(\eta) - \left\{ -\frac{(\mu + \lambda)(\mu + \lambda - 1)}{\eta^2} - \alpha \right\} H(\eta) = 0 \end{cases} \quad \text{Solution} \quad T(\xi, \eta, \Theta) = \left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{\eta} \right)^{\frac{N-1}{2}} \Xi(\xi) H(\eta) \Omega(\Theta)$$

Exemple de R-séparabilité : le système « hyper-Limaçon de Pascal », contribution de René Lagrange
« Les familles de surface de révolution qui possèdent des harmoniques, 1939, page 303 formules
76

Dans ce cas la fonction de révolution et les calculs de séparabilité donnent :

$$x_0 + i\rho = f(\xi + i\eta) = \frac{c}{4} \left(\text{Cotanh} \left(\frac{\xi + i\eta}{2} \right) \right)^2 \rightarrow \overline{x_0 + i\rho} = x_0 - i\rho = \overline{f(\xi + i\eta)} = f(\xi - i\eta)$$

$$x_0 + i\rho = \frac{c}{4} \frac{\text{Sinh}^2(\xi) - \text{Sin}^2(\eta) + 2i\text{Sinh}(\xi)\text{Sin}(\eta)}{(\text{Cosh}(\xi) - \text{Cos}(\eta))^2} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{c}{4} \frac{\text{Sinh}^2(\xi) - \text{Sin}^2(\eta)}{(\text{Cosh}(\xi) - \text{Cos}(\eta))^2} \\ \rho = -\frac{c}{4} \frac{2\text{Sinh}(\xi)\text{Sin}(\eta)}{(\text{Cosh}(\xi) - \text{Cos}(\eta))^2} \end{cases}$$

$$f'(\xi + i\eta) = -\frac{c \text{Cosh} \left(\frac{\xi + i\eta}{2} \right)}{4\text{Sinh}^3 \left(\frac{\xi + i\eta}{2} \right)} \quad f'(\xi - i\eta) = -\frac{c \text{Cosh} \left(\frac{\xi - i\eta}{2} \right)}{4\text{Sinh}^3 \left(\frac{\xi - i\eta}{2} \right)} \Rightarrow f'(\xi - i\eta)f'(\xi + i\eta) = \frac{c^2 (\text{Cosh}(\xi) + \text{Cos}(\eta))}{4(\text{Cosh}(\xi) - \text{Cos}(\eta))^3}$$

$$(f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta))^2 = -4\rho^2 = -c^2 \frac{\text{Sinh}^2(\xi)\text{Sin}^2(\eta)}{(\text{Cosh}(\xi) - \text{Cos}(\eta))^4} \Rightarrow \frac{f'(\xi + i\eta)f'(\xi - i\eta)}{(f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta))^2} = -\frac{\text{Sinh}^2(\xi) + \text{Sin}^2(\eta)}{4\text{Sinh}^2(\xi)\text{Sin}^2(\eta)} = \chi_1(\xi) + \chi_2(\eta)$$

$$\Rightarrow \chi_1(\xi) = -\frac{1}{4\text{Sinh}^2(\xi)} \quad \text{et} \quad \chi_2(\eta) = -\frac{1}{4\text{Sin}^2(\eta)}$$

De plus la fonction de R-Séparation est choisie comme suit :

$$\rho^{N-1} R^2(\xi, \eta) = e^{\int d\xi F_1(\xi)} e^{\int d\eta F_2(\eta)} \quad \text{et} \quad \rho = -c \frac{2\text{Sinh}(\xi)\text{Sin}(\eta)}{(\text{Cosh}(\xi) - \text{Cos}(\eta))^2}$$

$$\Rightarrow R(\xi, \eta) = (\text{Cosh}(\xi) - \text{Cos}(\eta))^{N-1} \Rightarrow \rho^{N-1} R^2(\xi, \eta) = (-1)^{N-1} 2^{N-1} c^{N-1} \text{Sinh}^{N-1}(\xi) \text{Sin}^{N-1}(\eta)$$

$$\Rightarrow e^{\int d\xi F_1(\xi)} = 2\gamma \text{Sinh}^{N-1}(\xi) \quad \text{et} \quad e^{\int d\eta F_2(\eta)} = \text{Sin}^{N-1}(\eta)$$

$$\Rightarrow \int d\xi F_1(\xi) = (N-1)(\text{Log}(\text{Sinh}(\eta)) + \text{Log}(2c)) \Rightarrow \begin{cases} F_1(\xi) = (N-1)\text{Cotanh}(\xi) \\ F_1'(\xi) = -\frac{(N-1)}{\text{Sinh}^2(\xi)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int d\eta F_2(\eta) = (N-1)\text{Log}(\text{Sin}(\eta)) \Rightarrow F_2(\eta) = (N-1)\text{Cotan}(\eta) \quad F_2'(\eta) = -\frac{(N-1)}{\text{Sin}^2(\eta)}$$

On obtient alors les équations séparées suivantes :

$$\begin{cases} \Xi''(\xi) + F_1'(\xi)\Xi'(\xi) + \left((4\mu(\mu+2\lambda-1) - 4\lambda(1-\lambda))\chi_1(\xi) + \frac{F_1^2(\xi)}{2} + \frac{F_1^2(\xi)}{4} - \alpha \right) \Xi(\xi) = 0 \\ H''(\eta) + F_2'(\eta)H'(\eta) + \left((4\mu(\mu+2\lambda-1) - 4\lambda(1-\lambda))\chi_2(\eta) + \frac{F_2^2(\eta)}{2} + \frac{F_2^2(\eta)}{4} + \alpha \right) H(\eta) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Xi''(\xi) + 2\lambda\text{Cotanh}(\xi)\Xi'(\xi) + \left\{ \lambda^2 - \frac{\mu(\mu+2\lambda-1)}{\text{Sinh}^2(\xi)} - \alpha \right\} \Xi(\xi) = 0 \\ H''(\eta) + 2\lambda\text{Cotan}(\eta)H'(\eta) + \left\{ -\lambda^2 - \frac{\mu(\mu+2\lambda-1)}{\text{Sin}^2(\eta)} + \alpha \right\} H(\eta) = 0 \end{cases} \quad \text{En posant} \quad \tilde{\alpha} = \alpha - \lambda^2 \quad \text{communément} \quad \tilde{\alpha} = \nu(\nu+1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Xi''(\xi) + 2\lambda\text{Cotanh}(\xi)\Xi'(\xi) - \left\{ \tilde{\alpha} + \frac{\mu(\mu+2\lambda-1)}{\text{Sinh}^2(\xi)} \right\} H(\eta) = 0 \\ H''(\eta) + 2\lambda\text{Cotan}(\eta)H'(\eta) + \left\{ \tilde{\alpha} - \frac{\mu(\mu+2\lambda-1)}{\text{Sin}^2(\eta)} \right\} H(\eta) = 0 \end{cases} \quad \text{Solution} \quad T(\xi, \eta, \Theta) = (\text{Cosh}(\xi) - \text{Cos}(\eta))^{N-1} \Xi(\xi) H(\eta) \Omega(\Theta)$$

Les solutions sont identiques à celles du système hyper-sphéroïdal allongé et inverse hyper-sphéroïdal allongé. Avec le choix de la fonction de séparation comme inverse de la racine carrée du rayon de révolution, on obtient d'autres équations séparées, il vient la R-Séparabilité-2 :

$$R(\xi, \eta) \propto \frac{1}{\sqrt{\rho^{N-1}}} \Rightarrow R(\xi, \eta) = \left(\frac{(\cosh(\xi) - \cos(\eta))^2}{\sinh(\xi) \sin(\eta)} \right)^{\frac{N-1}{2}} \quad \chi_1(\xi) = -\frac{1}{4\sinh^2(\xi)} \quad \text{et} \quad \chi_2(\eta) = -\frac{1}{4\sin^2(\eta)} \quad F_1(\xi) = F_2(\eta) = 0$$

$$\begin{cases} \Xi''(\xi) + \left\{ -\frac{(\mu + \lambda)(\mu + \lambda - 1)}{\sinh^2(\xi)} - \alpha \right\} \Xi(\xi) = 0 \\ H''(\eta) + \left\{ -\frac{(\mu + \lambda)(\mu + \lambda - 1)}{\sin^2(\eta)} + \alpha \right\} H(\eta) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Solution} \quad T(\xi, \eta, \Theta) = \left(\frac{(\cosh(\xi) - \cos(\eta))^2}{\sinh(\xi) \sin(\eta)} \right)^{\frac{N-1}{2}} \Xi(\xi) H(\eta) \Omega(\Theta)$$

Les hyper-cyclides de révolution

Pour les systèmes de coordonnées basés sur des cyclides de révolution, je commencerais par le système d'E.G.C. Poole conduisant directement à l'équation de Lamé. La fonction de révolution est la suivante :

$$\zeta = \mu + i\nu \quad x_0 + i\rho = f(\zeta) = i\gamma \frac{dn(\zeta, \alpha) - \alpha cn(\zeta, \alpha)}{\beta}$$

$$\rho = \gamma cn(\nu, \beta) \frac{dn(\mu, \alpha) dn(\nu, \beta) - \alpha cn(\mu, \alpha)}{\beta(1 - dn^2(\mu, \alpha) sn^2(\nu, \beta))} \quad x_0 = \gamma \alpha sn(\mu, \alpha) sn(\nu, \beta) \frac{dn(\mu, \alpha) dn(\nu, \beta) - \alpha cn(\mu, \alpha)}{\beta(1 - dn^2(\mu, \alpha) sn^2(\nu, \beta))}$$

$$\{\mu, \nu\} \in [0, 2K(\alpha)] \times [-K(\beta), K(\beta)] \quad \{\alpha, \beta\} \in [0, 1] \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1 \quad K(\alpha) = \int_0^{\pi/2} d\theta (1 - \alpha^2 \sin^2(\theta))^{-1/2} \quad K(\beta) = \int_0^{\pi/2} d\theta (1 - \beta^2 \sin^2(\theta))^{-1/2}$$

Le calcul de la R-Séparabilité de l'équation de Laplace donne :

$$\frac{f'(\mu + i\nu) f'(\mu - i\nu)}{(f(\mu + i\nu) - f(\mu - i\nu))^2} = \chi_1(\mu) + \chi_2(\nu) = \frac{dn^2(\mu, \alpha)}{4} - \frac{dn^2(\nu, \beta)}{4cn^2(\nu, \beta)} \Rightarrow \begin{cases} \chi_1(\mu) = \left(\frac{dn(\mu, \alpha)}{2} \right)^2 \\ \chi_2(\nu) = -\left(\frac{dn(\nu, \beta)}{2cn(\nu, \beta)} \right)^2 \end{cases}$$

Et le système d'équations séparées en utilisant la fonction de séparation « canonique » $1/\nu \rho^{N-1}$:

$$R(\mu, \nu) \propto \frac{1}{\sqrt{\rho(\mu, \nu)^{2\lambda}}} \Rightarrow R(\mu, \nu) = \left(\frac{\beta(1 - dn^2(\mu, \alpha) sn^2(\nu, \beta))}{\gamma cn(\nu, \beta) (dn(\mu, \alpha) dn(\nu, \beta) - \alpha cn(\mu, \alpha))} \right)^\lambda$$

$$\chi_1(\mu) = \left(\frac{dn(\mu, \alpha)}{2} \right)^2 \quad \text{et} \quad \chi_2(\nu) = -\left(\frac{dn(\nu, \beta)}{2cn(\nu, \beta)} \right)^2 \quad F_1(\mu) = F_2(\nu) = 0$$

$$\begin{cases} \Xi''(\mu) + \left\{ (\mu + \lambda)(\mu + \lambda - 1) dn^2(\mu, \alpha) - \zeta \right\} \Xi(\mu) = 0 \\ H''(\nu) + \left\{ -(\mu + \lambda)(\mu + \lambda - 1) \frac{dn^2(\nu, \beta)}{cn^2(\nu, \beta)} + \zeta \right\} H(\nu) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Solution} \quad T(\mu, \nu, \Theta) = \left(\frac{\beta(1 - dn^2(\mu, \alpha) sn^2(\nu, \beta))}{\gamma cn(\nu, \beta) (dn(\mu, \alpha) dn(\nu, \beta) - \alpha cn(\mu, \alpha))} \right)^\lambda \Xi(\xi) H(\eta) \Omega(\Theta)$$

Et sachant les relations entre les fonctions elliptiques de Jacobi, il vient :

$$\text{Posons } \tilde{\zeta} = (\mu + \lambda)(\mu + \lambda - 1) - \zeta \Rightarrow \begin{cases} \Xi''(\mu) + \left\{ -(\mu + \lambda)(\mu + \lambda - 1)\alpha^2 \text{sn}^2(\mu, \alpha) + \tilde{\zeta} \right\} \Xi(\mu) = 0 \\ H'''(\nu) + \left\{ -(\mu + \lambda)(\mu + \lambda - 1) \frac{\alpha^2 \text{sn}^2(\nu, \beta)}{\text{cn}^2(\nu, \beta)} - \tilde{\zeta} \right\} H(\nu) = 0 \end{cases}$$

Une fois développée l'expression $\text{sn}(i\nu, \beta) = i \frac{\text{sn}(\nu, \beta)}{\text{cn}(\nu, \beta)}$, il vient :

$$\begin{cases} \Xi''(\mu) + \left\{ \tilde{\zeta} - (\mu + \lambda)(\mu + \lambda - 1)\alpha^2 \text{sn}^2(\mu, \alpha) \right\} \Xi(\mu) = 0 \\ H'''(\nu) + \left\{ \tilde{\zeta} - (\mu + \lambda)(\mu + \lambda - 1)\alpha^2 \text{sn}^2(\tilde{\nu}, \beta) \right\} H(\nu) = 0 \end{cases}$$

Si l'on pose $\tau = \mu + \lambda - 1$ alors on retrouve exactement les équations de Lamé :

$$\tau = \mu + \lambda - 1 \Rightarrow \begin{cases} \Xi''(\mu) + \left\{ \tilde{\zeta} - \tau(\tau + 1)\alpha^2 \text{sn}^2(\mu, \alpha) \right\} \Xi(\mu) = 0 \\ H'''(\nu) + \left\{ \tilde{\zeta} - \tau(\tau + 1)\alpha^2 \text{sn}^2(\tilde{\nu}, \beta) \right\} H(\nu) = 0 \end{cases}$$

Système de coordonnées hyper-sphéroïdales

Nous allons considérer un plan méridien à deux dimensions de coordonnées « polaires » (ρ, x_0) plongé dans un espace à $N+1$ dimensions, sur ce plan « méridien » une ellipse et une hyperbole perpendiculaire forment les deux iso-courbes d'un système de coordonnées elliptique, ces iso-courbes engendrent par toutes les rotations complètes possibles (révolutions, groupe des rotations $SO(N-1)$ probablement) autour de l'axe x_0 des $N-1$ dimensions restantes des hyper-sphéroïdes de révolution.

De même si les iso-courbes génératrices du système de coordonnées sont des cercles et des droites quelconques passant par l'origine, par rotation on obtient des iso-variétés hyper-sphères et hyper-cônes.

Commençons par l'exemple du système hyper-sphérique dans un espace à $N+1$ dimensions défini par ses coordonnées cartésiennes (et le Laplacien correspondant) :

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_0) \quad r = \|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{i=N} x_i^2} \quad \Delta T(\vec{x}) = \sum_{i=0}^{i=N} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} = 0$$

La distance à l'axe x_0 définit la variable ρ : $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=N} x_i^2}$ et la relation : $r^2 = \rho^2 + x_0^2$ a lieu.

Introduisons les angles des « hyper-colatitudes » et l'« hyper-longitude », comme ceci :

$$r = \|\vec{x}\| \quad (\vartheta_N, \vartheta_{N-1}, \dots, \vartheta_1 = \varphi)$$

$$\begin{cases} x_0 = r \cos(\vartheta_N) & \vartheta_N \in [0, \pi] \\ x_1 = r \sin(\vartheta_N) \cos(\vartheta_{N-1}) & \vartheta_{N-1} \in [0, \pi] \\ x_2 = r \sin(\vartheta_N) \sin(\vartheta_{N-1}) \cos(\vartheta_{N-2}) & \vartheta_{N-2} \in [0, \pi] \\ \dots \\ x_{N-1} = r \sin(\vartheta_N) \sin(\vartheta_{N-1}) \dots \sin(\vartheta_2) \cos(\vartheta_1) & \vartheta_2 \in [0, \pi] \\ x_N = r \sin(\vartheta_N) \sin(\vartheta_{N-1}) \dots \sin(\vartheta_2) \sin(\vartheta_1) & \vartheta_1 = \varphi \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

$\vartheta_1 = \varphi \rightarrow \text{hyper-longitude} \quad \vartheta_n, \vartheta_{n-1}, \dots, \vartheta_2 \rightarrow \text{hyper-colatitude}$

On a bien :
$$\begin{cases} x_0 = r \cos(\vartheta_N) \\ \rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=N} x_i^2} = r \sin(\vartheta_N) \end{cases} \Rightarrow r^2 = \rho^2 + x_0^2$$

Les deux iso-variétés principales à N dimensions de ce système de coordonnées sont les hyper-

sphère $\sum_{i=0}^{i=N} x_i^2 = r^2 = \text{Cste}$ et les hyper-cônes : $\sqrt{\sum_{i=1}^{i=N} x_i^2} = x_0 \tan(\vartheta_N) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{i=N} x_i^2 = x_0^2 \tan^2(\vartheta_N)$.

La métrique de ce système de coordonnées s'écrit : $\sum_{i=0}^{i=N} dx_i^2 = dr^2 + \sum_{i=1}^{i=N} r_i^2 d\vartheta_{N+1-i}^2$ avec $r_i^2 = \sum_{l=i}^{l=N} x_l^2$

Les facteurs d'échelle se calculent comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_r = 1 \\ h_{g_N} = r \\ h_{g_{N-1}} = r \sin(g_N) \\ h_{g_{N-2}} = r \sin(g_N) \sin(g_{N-1}) \\ \dots \\ h_{g_i} = r \prod_{l=i+1}^{l=N} \sin(g_l) \\ \dots \\ h_{g_1} = r \prod_{l=2}^{l=N} \sin(g_l) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{g} = h_r h_{g_N} h_{g_{N-2}} \dots h_{g_1} = r^N \sin^{N-1}(g_N) \sin^{N-2}(g_{N-1}) \dots \sin(g_2) = r^N \prod_{l=2}^{l=N} \sin^{l-1}(g_l) \\ \frac{\sqrt{g}}{h_{g_i}^2} = r^{N-2} \frac{\prod_{l=2}^{l=N} \sin^{l-1}(g_l)}{\prod_{l=i+1}^{l=N} \sin^2(g_l)} = r^{N-2} \frac{\prod_{l=2, l \neq i}^{l=N} \sin^{l-1}(g_l)}{\prod_{l=i+1}^{l=N} \sin^2(g_l)} \sin^{i-1}(g_i) \end{array} \right.$$

Les termes du Laplacien se calculent ainsi :

$$\Delta_{N+1} T = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\sqrt{g}}{h_r^2} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial g_i} \left(\frac{\sqrt{g}}{h_{g_i}^2} \frac{\partial T}{\partial g_i} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{g}}{h_{g_i}^2} = r^{N-2} \frac{\prod_{l=2, l \neq i}^{l=N} \sin^{l-1}(g_l)}{\prod_{l=i+1}^{l=N} \sin^2(g_l)} \sin^{i-1}(g_i)$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial g_i} \left(\frac{\sqrt{g}}{h_{g_i}^2} \frac{\partial T}{\partial g_i} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{1}{\prod_{l=2}^{l=N} \sin^{l-1}(g_l)} \frac{\prod_{l=2, l \neq i}^{l=N} \sin^{l-1}(g_l)}{\prod_{l=i+1}^{l=N} \sin^2(g_l)} \frac{\partial}{\partial g_i} \left(\sin^{i-1}(g_i) \frac{\partial T}{\partial g_i} \right) = \frac{1}{r^2} \left(\prod_{\substack{j=i+1 \\ j \leq N}}^N \frac{1}{\sin^2(g_j)} \right) \frac{1}{\sin^{i-1}(g_i)} \frac{\partial}{\partial g_i} \left(\sin^{i-1}(g_i) \frac{\partial T}{\partial g_i} \right)$$

Et le laplacien dans ce système hyper-sphérique à N+1 dimensions a donc la forme suivante :

$$\Delta_{N+1} T = \frac{1}{r^N} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^N \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} L_N^2(T)$$

$$L_N^2 \quad \text{opérateur différentiel de moment angulaire} \quad L_N^2(T) = \sum_{i=1}^N \left(\prod_{\substack{j=i+1 \\ j \leq N}}^N \frac{1}{\sin^2(g_j)} \right) \frac{1}{\sin^{i-1}(g_i)} \frac{\partial}{\partial g_i} \left(\sin^{i-1}(g_i) \frac{\partial T}{\partial g_i} \right)$$

$$L_N^2(T) = \frac{1}{\sin^{N-1}(g_N)} \frac{\partial}{\partial g_N} \left(\sin^{N-1}(g_N) \frac{\partial T}{\partial g_N} \right) + \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{1}{\sin^2(g_N)} \prod_{\substack{j=i+1 \\ j \leq N-1}}^{N-1} \frac{1}{\sin^2(g_j)} \right) \frac{1}{\sin^{i-1}(g_i)} \frac{\partial}{\partial g_i} \left(\sin^{i-1}(g_i) \frac{\partial T}{\partial g_i} \right)$$

$$\Rightarrow L_N^2(g_N, \dots, g_1, T) = \frac{1}{\sin^{N-1}(g_N)} \frac{\partial}{\partial g_N} \left(\sin^{N-1}(g_N) \frac{\partial T}{\partial g_N} \right) + \frac{1}{\sin^2(g_N)} L_{N-1}^2(g_{N-1}, \dots, g_1, T)$$

Le N-ième terme de l'opérateur de moment angulaire, dépendant de g_N uniquement s'écrit :

$$\frac{1}{\sin^{N-1}(g_N)} \frac{\partial}{\partial g_N} \left(\sin^{N-1}(g_N) \frac{\partial T(r, g_N)}{\partial g_N} \right)$$

Exemples de Laplacien hyper-sphérique à 3 et 4 dimensions :

$$L_N^2(T) = \sum_{i=1}^N \left(\prod_{\substack{j=i+1 \\ j \leq N}}^N \frac{1}{\sin^2(\vartheta_j)} \right) \frac{1}{\sin^{i-1}(\vartheta_i)} \frac{\partial}{\partial \vartheta_i} \left(\sin^{i-1}(\vartheta_i) \frac{\partial T}{\partial \vartheta_i} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2-D \rightarrow N=1 \rightarrow L_1^2(T) = \frac{\partial^2 T}{\partial \vartheta_1^2} \\ 3-D \rightarrow N=2 \rightarrow L_2^2(T) = \frac{1}{\sin^2(\vartheta_2)} \frac{\partial^2 T}{\partial \vartheta_1^2} + \frac{1}{\sin(\vartheta_2)} \frac{\partial}{\partial \vartheta_2} \left(\sin(\vartheta_2) \frac{\partial T}{\partial \vartheta_2} \right) \\ 4-D \rightarrow N=3 \rightarrow L_3^2(T) = \frac{1}{\sin^2(\vartheta_3) \sin^2(\vartheta_2)} \frac{\partial^2 T}{\partial \vartheta_1^2} + \frac{1}{\sin^2(\vartheta_3)} \frac{1}{\sin(\vartheta_2)} \frac{\partial}{\partial \vartheta_2} \left(\sin(\vartheta_2) \frac{\partial T}{\partial \vartheta_2} \right) + \frac{1}{\sin^2(\vartheta_3)} \frac{\partial}{\partial \vartheta_3} \left(\sin^2(\vartheta_3) \frac{\partial T}{\partial \vartheta_3} \right) \end{array} \right.$$

Continuons par l'exemple du système hyper-cylindrique dans un espace à N+1 dimensions défini par ses coordonnées cartésiennes (et le Laplacien correspondant) :

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_0) \quad r = \left\| \vec{x} \right\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{i=N} x_i^2} \quad \Delta T(\vec{x}) = \sum_{i=0}^{i=N} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} = 0$$

La distance ρ à l'axe x_0 est l'une des coordonnées $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=N} x_i^2}$, la hauteur x_0 est la deuxième, les autres coordonnées sont le système des N-1 angles dans l'hyper-sphère à N-Dimension de rayon ρ :

$$\Delta_{N+1} T = \frac{1}{\rho^{N-1}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^{N-1} \frac{\partial T}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial x_0^2} + \frac{1}{\rho^2} L_{N-1}^2(T)$$

$$L_{N-1}^2 \text{ opérateur différentiel de moment angulaire} \quad L_{N-1}^2(T) = \sum_{i=1}^{N-1} \left(\prod_{\substack{j=i+1 \\ j \leq N-1}}^{N-1} \frac{1}{\sin^2(\vartheta_j)} \right) \frac{1}{\sin^{i-1}(\vartheta_i)} \frac{\partial}{\partial \vartheta_i} \left(\sin^{i-1}(\vartheta_i) \frac{\partial T}{\partial \vartheta_i} \right)$$

Dans un espace à N+1 dimensions, que donne les coordonnées sphéroïdales « allongées » dans un hyper-plan méridien : le système de coordonnées hyper-sphéroïdales

Dans un « hyper-plan » méridien ρ, x_0 , introduisons deux variables ξ, η telles que (formules de passages du système hyper-sphéroïdale au système hyper-cylindrique) :

$$\begin{cases} \rho = c\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \\ x_0 = c\xi\eta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi = \text{Cosh}(\mu) \\ \eta = \text{Cos}(\nu) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \rho = c \text{Sinh}(\mu)\text{Sin}(\nu) \\ x_0 = c \text{Cosh}(\mu)\text{Cos}(\nu) \end{cases}$$

Les formules de passage du système hyper-sphéroïdal au système hyper-sphérique sont les suivantes :

$$\begin{cases} c\xi\eta = r \text{Cos}(\vartheta_N) \\ c\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} = r \text{Sin}(\vartheta_N) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Tan}(\vartheta_N) = \frac{\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}}{\xi\eta} \Rightarrow \text{Sin}(\vartheta_N) = \sqrt{\frac{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}{\xi^2 + \eta^2 - 1}} \\ r = c\sqrt{\xi^2\eta^2 + (\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} = c\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - 1} \Rightarrow \text{Cos}(\vartheta_N) = \frac{\xi\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - 1}} \end{cases}$$

Transcrit sur le système de coordonnées hyper-sphéroïdales « allongées » :

$$\begin{cases} x_0 = c\xi\eta \\ x_1 = c\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \text{Cos}(\vartheta_{N-1}) \quad \vartheta_{N-1} \in [0, \pi] \\ x_2 = c\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \text{Sin}(\vartheta_{N-1}) \text{Cos}(\vartheta_{N-2}) \quad \vartheta_{N-2} \in [0, \pi] \\ \dots \\ x_N = c\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \text{Sin}(\vartheta_{N-1}) \text{Sin}(\vartheta_{N-2}) \dots \text{Sin}(\vartheta_2) \text{Sin}(\vartheta_1) \quad \vartheta_1 = \varphi \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Les facteurs d'échelle se calculent comme suit :

$$\begin{cases} h_\xi = c\sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1}} \\ h_\eta = c\sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{1 - \eta^2}} \\ h_{\vartheta_{N-1}} = c\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \\ h_{\vartheta_{N-2}} = c\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \text{Sin}(\vartheta_{N-1}) \Rightarrow \dots \\ h_{\vartheta_1} = c\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \prod_{l=i+1}^{l=N-1} \text{Sin}(\vartheta_l) \\ \dots \\ h_{\vartheta_1} = c\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \prod_{l=2}^{l=N-1} \text{Sin}(\vartheta_l) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{g} = h_\xi h_\eta h_{\vartheta_{N-1}} h_{\vartheta_{N-2}} \dots h_{\vartheta_1} = c^{N+1} (\xi^2 - \eta^2) ((\xi^2 - 1)(1 - \eta^2))^{\frac{N-2}{2}} \prod_{l=2}^{l=N-1} \text{Sin}^{l-1}(\vartheta_l) \\ \frac{\sqrt{g}}{h_\xi^2} = c^{N-1} (\xi^2 - 1) ((\xi^2 - 1)(1 - \eta^2))^{\frac{N-2}{2}} \prod_{l=2}^{l=N-1} \text{Sin}^{l-1}(\vartheta_l) \\ \frac{\sqrt{g}}{h_\eta^2} = c^{N-1} (1 - \eta^2) ((\xi^2 - 1)(1 - \eta^2))^{\frac{N-2}{2}} \prod_{l=2}^{l=N-1} \text{Sin}^{l-1}(\vartheta_l) \\ \frac{\sqrt{g}}{h_{\vartheta_1}^2} = c^{N-1} (\xi^2 - \eta^2) ((\xi^2 - 1)(1 - \eta^2))^{\frac{N-4}{2}} \frac{\prod_{l=2, l \neq i}^{l=N-1} \text{Sin}^{l-1}(\vartheta_l)}{\prod_{l=i+1}^{l=N-1} \text{Sin}^2(\vartheta_l)} \text{Sin}^{i-1}(\vartheta_l) \end{cases}$$

Les termes du Laplacien se calculent ainsi :

$$\begin{aligned}\Delta_{N+1}T &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\sqrt{g}}{h_\xi^2} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\sqrt{g}}{h_\eta^2} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial}{\partial \vartheta_i} \left(\frac{\sqrt{g}}{h_{\vartheta_i}^2} \frac{\partial T}{\partial \vartheta_i} \right) \\ \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\sqrt{g}}{h_\xi^2} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) &= \frac{1}{c^2} \frac{1}{(\xi^2 - \eta^2)(\xi^2 - 1)^{\frac{N-2}{2}}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi^2 - 1)^{\frac{N}{2}} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \\ \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\sqrt{g}}{h_\eta^2} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) &= \frac{1}{c^2} \frac{1}{(\xi^2 - \eta^2)(1 - \eta^2)^{\frac{N-2}{2}}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left((1 - \eta^2)^{\frac{N}{2}} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \\ \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \vartheta_i} \left(\frac{\sqrt{g}}{h_{\vartheta_i}^2} \frac{\partial T}{\partial \vartheta_i} \right) &= \frac{1}{c^2} \frac{1}{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \frac{1}{\prod_{l=i+1}^{N-1} \sin^2(\vartheta_l)} \frac{1}{\sin^{i-1}(\vartheta_i)} \frac{\partial}{\partial \vartheta_i} \left(\sin^{i-1}(\vartheta_i) \frac{\partial T}{\partial \vartheta_i} \right)\end{aligned}$$

Et le laplacien dans ce système de coordonnées hyper-sphéroïdales « allongées » à $N+1$ dimensions a donc la forme suivante :

$$\Delta_{N+1}T = \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{c^2} \frac{1}{\xi^2 - \eta^2} (\xi^2 - 1)^{\frac{2-N}{2}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi^2 - 1)^{\frac{N}{2}} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \\ &+ \frac{1}{c^2} \frac{1}{\xi^2 - \eta^2} (1 - \eta^2)^{\frac{2-N}{2}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left((1 - \eta^2)^{\frac{N}{2}} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \\ &+ \frac{1}{c^2} \frac{1}{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} L_{N-1}^2(T) \end{aligned} \right\}$$

L_{N-1}^2 opérateur différentiel de moment angulaire

$$L_{N-1}^2(T) = \sum_{i=1}^{N-1} \left(\prod_{\substack{j=i+1 \\ j \leq N}}^{N-1} \frac{1}{\sin^2(\vartheta_j)} \right) \frac{1}{\sin^{i-1}(\vartheta_i)} \frac{\partial}{\partial \vartheta_i} \left(\sin^{i-1}(\vartheta_i) \frac{\partial T}{\partial \vartheta_i} \right)$$

Normalement on retrouve bien le système sphéroïdal « allongé » pour $N+1=3$, soit $N=2$

$$\Delta_3 T = \frac{1}{c^2} \frac{1}{\xi^2 - \eta^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi^2 - 1) \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left((1 - \eta^2) \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \frac{\xi^2 - \eta^2}{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} L_1^2(T) \right\} \quad \text{avec} \quad L_1^2(T) = \frac{\partial^2 T}{\partial \vartheta_1^2}$$

Séparabilité de l'équation de Laplace et de l'équation des ondes hyper-sphéroïdales, sans et avec dépendance angulaire

Examinons maintenant la séparabilité de l'équation de Laplace dans le cas où la fonction scalaire n'a aucune dépendance angulaire. Dans ce cas, en introduisant la variable de séparation adéquate ω , la séparation des variables donne :

$$\begin{aligned} L_{N-1}^2(T) = 0 &\Rightarrow \Delta_{N+1}T = \frac{1}{c^2} \frac{1}{\xi^2 - \eta^2} \left\{ (\xi^2 - 1)^{\frac{2-N}{2}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi^2 - 1)^{\frac{N}{2}} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + (1 - \eta^2)^{\frac{2-N}{2}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left((1 - \eta^2)^{\frac{N}{2}} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \right\} = 0 \\ &\Rightarrow (\xi^2 - 1)^{\frac{2-N}{2}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi^2 - 1)^{\frac{N}{2}} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + (1 - \eta^2)^{\frac{2-N}{2}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left((1 - \eta^2)^{\frac{N}{2}} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) = 0 \Leftarrow T = T(\xi, \eta) = \Xi(\xi)H(\eta) \\ &\Rightarrow \begin{cases} (1 - \eta^2)^{\frac{2-N}{2}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left((1 - \eta^2)^{\frac{N}{2}} \frac{\partial H}{\partial \eta} \right) + \omega H = 0 \\ (\xi^2 - 1)^{\frac{2-N}{2}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi^2 - 1)^{\frac{N}{2}} \frac{\partial \Xi}{\partial \xi} \right) - \omega \Xi = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

En posant $\lambda = (N-1)/2$, le système d'équation est assimilable aux équation différentielles des fonctions de Gegenbauer :

$$\begin{cases} (1 - \eta^2)^{\frac{1-2\lambda}{2}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left((1 - \eta^2)^{\frac{2\lambda+1}{2}} \frac{\partial H}{\partial \eta} \right) + \omega H = (1 - \eta^2) \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} - (2\lambda + 1) \eta \frac{\partial H}{\partial \eta} + \omega H = 0 \\ (\xi^2 - 1)^{\frac{1-2\lambda}{2}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi^2 - 1)^{\frac{2\lambda+1}{2}} \frac{\partial \Xi}{\partial \xi} \right) - \omega \Xi = (\xi^2 - 1) \frac{\partial^2 \Xi}{\partial \xi^2} + (2\lambda + 1) \xi \frac{\partial \Xi}{\partial \xi} - \omega \Xi = 0 \end{cases}$$

Pour l'équation des ondes, avec une variable de séparation ω également et une variable de fréquence, toutes deux bien choisies, il vient :

$$\begin{aligned} \Delta_{N+1}T + \frac{\gamma^2}{c^2}T = 0 &\Rightarrow \frac{1}{c^2} \frac{1}{\xi^2 - \eta^2} \left\{ (\xi^2 - 1)^{\frac{1-2\lambda}{2}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi^2 - 1)^{\frac{2\lambda+1}{2}} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + (1 - \eta^2)^{\frac{1-2\lambda}{2}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left((1 - \eta^2)^{\frac{2\lambda+1}{2}} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \right\} + \frac{\gamma^2}{c^2}T = 0 \\ &\Rightarrow (\xi^2 - 1)^{\frac{1-2\lambda}{2}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi^2 - 1)^{\frac{2\lambda+1}{2}} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + (1 - \eta^2)^{\frac{1-2\lambda}{2}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left((1 - \eta^2)^{\frac{2\lambda+1}{2}} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \gamma^2(\xi^2 - \eta^2)T = 0 \Leftarrow T = T(\xi, \eta) = \Xi(\xi)H(\eta) \\ &\Rightarrow \begin{cases} (1 - \eta^2)^{\frac{1-2\lambda}{2}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left((1 - \eta^2)^{\frac{2\lambda+1}{2}} \frac{\partial H}{\partial \eta} \right) + (\omega + \gamma^2(1 - \eta^2))H = 0 \\ (\xi^2 - 1)^{\frac{1-2\lambda}{2}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi^2 - 1)^{\frac{2\lambda+1}{2}} \frac{\partial \Xi}{\partial \xi} \right) + (-\omega + \gamma^2(\xi^2 - 1))\Xi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - \eta^2) \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} - (2\lambda + 1) \eta \frac{\partial H}{\partial \eta} + (\omega + \gamma^2(1 - \eta^2))H = 0 \\ (\xi^2 - 1) \frac{\partial^2 \Xi}{\partial \xi^2} + (2\lambda + 1) \xi \frac{\partial \Xi}{\partial \xi} - (\omega - \gamma^2(\xi^2 - 1))\Xi = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Supposons maintenant une dépendance angulaire quelconque dans l'équation des ondes qui conduise à introduire une seconde variable de séparation, il vient :

$$\begin{aligned}
T &= \Xi(\xi)H(\eta)\Omega(\Theta) \quad \Theta = (\vartheta_{N-1}, \dots, \vartheta_1) \quad L_{N-1}^2(T) = \Xi(\xi)H(\eta)L_{N-1}^2(\Omega(\Theta)) \quad \Delta_{N+1}T + \frac{\gamma^2}{c^2}T = 0 \\
\Rightarrow \frac{1}{\Xi(\xi)}(\xi^2 - 1)^{\frac{1-2\lambda}{2}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi^2 - 1)^{\frac{2\lambda+1}{2}} \frac{\partial \Xi(\xi)}{\partial \xi} \right) &+ \frac{1}{H(\eta)}(1 - \eta^2)^{\frac{1-2\lambda}{2}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left((1 - \eta^2)^{\frac{2\lambda+1}{2}} \frac{\partial H(\eta)}{\partial \eta} \right) + \left(\frac{1}{1 - \eta^2} + \frac{1}{\xi^2 - 1} \right) \frac{L_{N-1}^2(\Omega(\Theta))}{\Omega(\Theta)} + \gamma^2(\xi^2 - \eta^2) = 0 \\
\text{Si l'on pose } \frac{L_{N-1}^2(\Omega(\Theta))}{\Omega(\Theta)} + \mu(\mu + 2\lambda - 1) &= 0 \\
\Rightarrow \frac{1}{\Xi(\xi)}(\xi^2 - 1)^{\frac{1-2\lambda}{2}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi^2 - 1)^{\frac{2\lambda+1}{2}} \frac{\partial \Xi(\xi)}{\partial \xi} \right) &+ \frac{1}{H(\eta)}(1 - \eta^2)^{\frac{1-2\lambda}{2}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left((1 - \eta^2)^{\frac{2\lambda+1}{2}} \frac{\partial H(\eta)}{\partial \eta} \right) - \left(\frac{1}{1 - \eta^2} + \frac{1}{\xi^2 - 1} \right) \mu(\mu + 2\lambda - 1) + \gamma^2(\xi^2 - \eta^2) = 0 \\
\left\{ \begin{aligned} (1 - \eta^2) \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} - (2\lambda + 1) \eta \frac{\partial H}{\partial \eta} &+ \left(\omega + \gamma^2(1 - \eta^2) - \frac{\mu(\mu + 2\lambda - 1)}{1 - \eta^2} \right) H = 0 \\ (\xi^2 - 1) \frac{\partial^2 \Xi}{\partial \xi^2} + (2\lambda + 1) \xi \frac{\partial \Xi}{\partial \xi} &- \left(\omega - \gamma^2(\xi^2 - 1) + \frac{\mu(\mu + 2\lambda - 1)}{\xi^2 - 1} \right) \Xi = 0 \\ L_{N-1}^2(\Theta) + \mu(\mu + 2\lambda - 1) \Omega(\Theta) &= 0 \end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

Ce qui établit des équations différentielles que je pourrais nommer d'hyper-sphéroïdales.

Étude de l'équation hyper-sphéroïdale issue de la séparation des variables de l'équation des ondes dans un système de coordonnées hyper-sphéroïdales à N+1 dimensions (N=2λ+1)

Est-il possible de construire des solutions de l'équation hyper-sphéroïdale à partir des fonctions de Gegenbauer associées :

$$(1-x^2)y''(x) - (2\lambda+1)x y'(x) + \left(\omega + \gamma^2(1-x^2) - \frac{\mu(\mu+2\lambda-1)}{1-x^2} \right) y(x) = 0$$

Dans ce qui suit le domaine de l'argument x peut se répartir entre $x \in [-1,1]$ et $x > 1$. Aussi les solutions de cette équation seront appelées, conformément au cas des ondes sphéroïdales, lorsque $x \in [-1,1]$ des fonctions d'ondes angulaires et lorsque $x > 1$ des fonctions d'ondes radiales.

Les fonctions de Gegenbauer de première et deuxième espèce sont solutions de l'équation différentielle : $(1-x^2)y''(x) - (2\lambda+1)x y'(x) + \nu(\nu+2\lambda)y(x) = 0$. Cette équation différentielle est une extension de celle de Legendre, qui permet de définir notamment les polynômes de Gegenbauer (ou Ultra-sphériques) au même titre que sont définis les polynômes de Legendre.

Les fonctions de Gegenbauer associées de première et deuxième espèce sont solutions de l'équation différentielle : $(1-x^2)y''(x) - (2\lambda+1)x y'(x) + \left\{ \nu(\nu+2\lambda) - \frac{\mu(\mu+2\lambda-1)}{1-x^2} \right\} y(x) = 0$. Là encore c'est une extension directe de l'équation différentielle qui donne naissance aux fonctions de Legendre associées.

Cette équation différentielle n'est pas souvent étudiée, ni ses solutions, mais l'on peut en dire un peu plus lorsque μ est un entier, soit $\mu = m$. Alors on peut construire la fonction de première espèce comme suit à partir des fonctions de Ferrer (Legendre sur $[-1,1]$):

$$x \in [-1,1] \quad C_{\nu}^{\lambda,m}(x) = (-1)^m \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}} \sqrt{\pi} \Gamma(\nu+m+2\lambda)}{\Gamma(\nu-m+1)\Gamma(\lambda)} (1-x^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-m}(x)$$

On s'assure que pour $\lambda=1/2$, on retrouve la fonction de Legendre associées :

$$C_{\nu}^{\frac{1}{2},m}(x) = (-1)^m \frac{\Gamma(\nu+m+1)}{\Gamma(\nu-m+1)} P_{\nu}^{-m}(x) = P_{\nu}^m(x)$$

Toutefois cette dernière définition peut en apparence comporter un pôle en $z=1$ lorsque $\lambda \geq 1/2$. En réalité il n'en est rien car on démontre que la limite est bornée sur la ligne des réels (voire nulle notamment lorsque $\lambda > 1/2$):

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} C_{\nu}^{\lambda,m}(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-1)^m \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}} \sqrt{\pi} \Gamma(\nu+m+2\lambda)}{\Gamma(\nu-m+1)\Gamma(\lambda)} (1-x^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-m}(x) = 0$$

Pour éviter numériquement l'écueil de $x=1$, on peut aussi définir cette même fonction par la formule suivante avec la fonction hypergéométrique :

$$C_v^{\lambda, \mu}(z) = \frac{(-1)^\mu \Gamma(2\lambda + \nu + \mu) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \lambda\right)}{2^\mu \Gamma(2\lambda) \Gamma(\nu - \mu + 1) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \lambda + \mu\right)} (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} {}_2F_1\left(-\nu + \mu, \nu + 2\lambda + \mu; \frac{1}{2} + \lambda + \mu; \frac{1-x}{2}\right)$$

qui cette fois ne présente plus de pôle apparent pour $x=1$ et $\mu=m$ entier. Et l'on s'assure qu'elle redonne bien les valeurs des fonctions de Gegenbauer et les fonctions associées de Legendre pour $\mu=m$ entier :

$$\lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow C_v^{\frac{1}{2}, \mu}(x) = P_v^\mu(x) = (-1)^\mu \frac{\Gamma(\nu + \mu + 1)}{2^\mu \Gamma(\nu - \mu + 1) \Gamma(1 + \mu)} (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} {}_2F_1\left(-\nu + \mu, \nu + 1 + \mu; 1 + \mu; \frac{1-x}{2}\right)$$

$$\mu = 0 \Rightarrow C_v^{\lambda, 0}(x) = C_v^\lambda(x) = \frac{\Gamma(2\lambda + \nu)}{\Gamma(2\lambda) \Gamma(\nu + 1)} {}_2F_1\left(-\nu, \nu + 2\lambda; \frac{1}{2} + \lambda; \frac{1-x}{2}\right)$$

En appliquant la formule de transformation : ${}_2F_1(a, b; c; x) = (1-x)^{c-a-b} {}_2F_1(c-a, c-b; c; x)$, on obtient sur une des formes hyper-géométrique :

$$C_v^{\lambda, \mu}(z) = (-1)^\mu \times \frac{\Gamma(\nu + \mu + 2\lambda) \times \Gamma\left(\frac{1}{2} + \lambda\right)}{2^\mu \Gamma(2\lambda) \times \Gamma(\nu - \mu + 1) \times \Gamma\left(\frac{1}{2} + \lambda + \mu\right)} (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} {}_2F_1\left(-\nu + \mu, \nu + 2\lambda + \mu; \frac{1}{2} + \lambda + \mu; \frac{1-x}{2}\right)$$

Or ${}_2F_1\left(-\nu + \mu, \nu + 2\lambda + \mu; \frac{1}{2} + \lambda + \mu; \frac{1-x}{2}\right) = \left(\frac{1+x}{2}\right)^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu} {}_2F_1\left(\nu + \frac{1}{2} + \lambda, -\nu + \frac{1}{2} - \lambda; \frac{1}{2} + \lambda + \mu; \frac{1-x}{2}\right)$

$$C_v^{\lambda, \mu}(z) = (-1)^\mu \times \frac{\Gamma(\nu + \mu + 2\lambda) \times \Gamma\left(\frac{1}{2} + \lambda\right)}{\Gamma(2\lambda) \times \Gamma(\nu - \mu + 1) \times \Gamma\left(\frac{1}{2} + \lambda + \mu\right)} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{\mu}{2}} \times \left(\frac{1+x}{2}\right)^{\frac{1}{2}-\lambda} {}_2F_1\left(\nu + \frac{1}{2} + \lambda, -\nu + \frac{1}{2} - \lambda; \frac{1}{2} + \lambda + \mu; \frac{1-x}{2}\right)$$

Pour la construction des fonctions de Gegenbauer associées de deuxième espèce, je vais me restreindre au cas où le paramètre $\mu=m$ est un entier. Dans ce cas la fonction de deuxième espèce se déduit d'une formule de dérivation de type Rodrigues. Je donne sans démonstration le résultat de cette construction à partir des fonctions associées de Legendre de deuxième espèce :

$$C_{(\mathcal{Q}), \nu}^{\lambda, m}(x) = (-1)^m \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}} \sqrt{\pi} \Gamma(\nu + m + 2\lambda)}{\Gamma(\nu - m + 1) \Gamma(\lambda)} (1-x^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-m}(x)$$

Il se trouve que pour les conditions générales de paramètres μ, ν telles que $\mu+\nu$ est un entier négatif alors la fonction associées de Legendre (Ferrer) $Q_\nu^\mu(x)$ n'est pas définie. Dans le contexte de la construction des fonctions de Gegenbauer associées de deuxième espèce, lorsque $\nu-m$ est un entier ces dernières ne sont donc pas définies : $\frac{1}{2} - \lambda - m + \lambda + \nu - \frac{1}{2} = \nu - m < 0$. Afin de simplifier la suite de l'exposé, je supposerais donc que $\nu \geq m$.

Cas particulier des fonctions hyper-sphéroïdales de paramètres λ demi-entier

Pour la construction de ces fonctions, on peut utiliser une autre forme des fonctions de Gegenbauer associées qui ne sont définies que pour les valeurs λ demi-entières, comme suit :

$$x \in [-1,1] \quad \begin{cases} C_v^{\lambda,\mu}(x) = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} (1-x^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{\lambda+v-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(x) \\ C_{(\mathcal{Q}),v}^{\lambda,\mu}(x) = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} (1-x^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} Q_{\lambda+v-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(x) \end{cases}$$

Cette définition étant valable quelques soient les valeurs de μ , et notamment lorsque $\mu=1-\lambda$.

Fonctions de Gegenbauer associées sur z en dehors $[-\infty,-1]$ lien avec les fonctions « On The Cut » $z \in [-1,1]$

Les définitions précédentes portent essentiellement sur les fonctions de Gegenbauer associées sur le domaine $x \in [-1,1]$ dites communément « On the Cut » que l'on a défini précisément pour les valeurs de μ entières ou de λ demi-entières comme suit :

$$\begin{aligned} \mu \in \mathbf{N} &\rightarrow C_v^{\lambda,\mu}(z) = (-1)^m \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}} \sqrt{\pi} \times \Gamma(v+m+2\lambda)}{\Gamma(v-m+1)\Gamma(\lambda)} (z^2-1)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{\lambda+v-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-m}(x) \\ \lambda - \frac{1}{2} \in \mathbf{N} &\rightarrow C_v^{\lambda,\mu}(x) = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} (1-x^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{\lambda+v-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(x) \end{aligned}$$

Dans un document de présentation portant sur « Dérivées paramétriques des fonctions de type hypergéométrique », l'extension au cas $z>1$ a déjà été présenté en page 85. J'avais défini deux types de fonction suivant le domaine de l'argument : 1) $x \in [-1,1]$ et 2) $x>1$. Pour ce qui est des

fonctions de Legendre associées, la liaison est connue et de la forme : $P_{2,v}^{\mu}(z) = \frac{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}{(z-1)^{\frac{\mu}{2}}} P_{1,v}^{\mu}(z)$. Il

s'avère que pour la fonction de Gegenbauer il en est de même $C_{2,v}^{\lambda,\mu}(z) = \frac{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}{(z-1)^{\frac{\mu}{2}}} C_{1,v}^{\lambda,\mu}(z)$ avec les

choix qui suivent pour la fonction de première espèce :

$$\begin{cases} \lambda, v \in \mathbf{R} \quad \mu \in \mathbf{N} & C_{1,v}^{\lambda,\mu}(z) = (-1)^{\mu} \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} \frac{\Gamma(v+\mu+2\lambda)}{\Gamma(v-\mu+1)} (1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{\lambda+v-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z) & C_{2,v}^{\lambda,\mu}(z) = \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} \frac{\Gamma(v+\mu+2\lambda)}{\Gamma(v-\mu+1)} (z^2-1)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{2,\lambda+v-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z) \\ \mu, v \in \mathbf{R} \quad p \in \mathbf{N} \quad \lambda = \frac{2p+1}{2} & C_{1,v}^{\lambda,\mu}(z) = (-1)^{\frac{1-2\lambda}{2}} \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} (1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{\lambda+v-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z) & C_{2,v}^{\lambda,\mu}(z) = \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} (z^2-1)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{2,\lambda+v-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z) \end{cases}$$

Comme peut être définie à l'aide de la fonction de Legendre associée sur tout le plan complexe

hormis la coupure $[-\infty, -1[$, la fonction de Ferrer ainsi:

$$\begin{cases} x \in [-1, +1] & P_v^\mu(x) = e^{\frac{i\mu\pi}{2}} P_v^\mu(x+i0) = e^{-\frac{i\mu\pi}{2}} P_v^\mu(x-i0) \\ P_v^\mu(z) & \text{pour tout } z \notin [-\infty, -1] \end{cases}$$

Il en est de même avec la fonction de Gegenbauer associée de première espèce « On The Cut » :

$$\begin{cases} x \in [-1, +1] & C_v^{\lambda, \mu}(x) = e^{\frac{i\mu\pi}{2}} C_v^{\lambda, \mu}(x+i0) = e^{-\frac{i\mu\pi}{2}} C_v^{\lambda, \mu}(x-i0) \\ C_v^{\lambda, \mu}(z) & \text{pour tout } z \notin [-\infty, -1] \end{cases}$$

Dans ces conditions toutes les relations de récurrence, les relations aux plus proches voisins, les relations « linéarisant » la dérivée première sont valables sur les deux domaines de définition.

Et dans la suite du document je ne ferais mention de la fonction de Gegenbauer associée que sous sa notation habituelle : $C_v^{\lambda, \mu}(z)$ avec comme référence de domaine soit le domaine $[-1, +1]$ lorsque l'on désigne les fonctions hyper-sphéroïdales angulaires , et le domaine $[1, +\infty)$, lorsque l'on désigne les fonctions hyper-sphéroïdales radiales.

Relations de récurrence, relations aux plus proches voisins et relations de première dérivés sur les fonctions de Gegenbauer associées

Les fonctions de Gegenbauer associées de première ou deuxième espèce satisfont à la relation de récurrence suivante :

$$z C_v^{\lambda,m}(z) = \frac{(\nu+1-m)C_{\nu+1}^{\lambda,m}(z) + (2\lambda+m+\nu-1)C_{\nu-1}^{\lambda,m}(z)}{2(\lambda+\nu)}$$

$$z C_{(Q),\nu}^{\lambda,m}(z) = \frac{(\nu+1-m)C_{(Q),\nu+1}^{\lambda,m}(z) + (2\lambda+m+\nu-1)C_{(Q),\nu-1}^{\lambda,m}(z)}{2(\lambda+\nu)}$$

En itérant cette relation uniquement sur les fonctions de première espèce, une fois de plus, il vient :

$$z^2 C_v^{\lambda,m}(z) = \left\{ \begin{aligned} & \frac{(m+\nu+2\lambda-2)(m+\nu+2\lambda-1)}{(2\nu+2\lambda)(2\nu+2\lambda-2)} C_{\nu-2}^{\lambda,m}(z) + \\ & + \frac{2\nu(\nu+2\lambda) + (2m-1)(1-2\lambda) - 2m^2 - 1}{(2\nu+2\lambda-2)(2\nu+2\lambda+2)} C_v^{\lambda,m}(z) + \\ & + \frac{(m-\nu-1)(m-\nu-2)}{(2\nu+2\lambda)(2\nu+2\lambda+2)} C_{\nu+2}^{\lambda,m}(z) \end{aligned} \right\}$$

Une des formules de dérivation « vers l'arrière » des fonctions de Gegenbauer associées est la

$$C_v^{\lambda,m'}(z) = \frac{-\nu z C_v^{\lambda,m}(z) + (2\lambda+m-1+\nu)C_{\nu-1}^{\lambda,m}(z)}{(1-z^2)}$$

suivante :

. Une itération supplémentaire de cette

formule permet de calculer la dérivée seconde :

$$C_v^{\lambda,m''}(z) = \frac{\nu(z^2(\nu-1)-1)C_v^{\lambda,m}(z) - z(2\nu-3)(2\lambda+m+\nu-1)C_{\nu-1}^{\lambda,m}(z) + (2\lambda+m+\nu-1)(2\lambda+m+\nu-2)C_{\nu-2}^{\lambda,m}(z)}{(1-z^2)^2}$$

Mais pour éviter que nous soyons dans le cas $\nu-m < 0$ pour les fonctions de deuxième espèce, il vaut mieux utiliser la formule de dérivation « vers l'avant » suivante :

$$C_v^{\lambda,m'}(z) = \frac{(2\lambda+\nu)z C_v^{\lambda,m}(z) - (\nu+1-m)C_{\nu+1}^{\lambda,m}(z)}{1-z^2}$$

Une itération supplémentaire de cette formule permet de calculer la dérivée seconde :

$$C_v^{\lambda,m''}(z) = \frac{(2\lambda+\nu)(1+z^2(1+2\lambda+\nu))C_v^{\lambda,m}(z) + z(m-\nu-1)(4\lambda+2\nu+3)C_{\nu+1}^{\lambda,m}(z) + (m-\nu-1)(m-\nu-2)C_{\nu+2}^{\lambda,m}(z)}{(1-z^2)^2}$$

On sait également que la dérivée seconde peut être calculée de l'équation différentielle, soit:

$$C_v^{\lambda,m''}(z) = \frac{(2\lambda+1)z C_v^{\lambda,m'}(z) - \left(\nu(\nu+2\lambda) - \frac{m(m+2\lambda-1)}{1-z^2} \right) C_v^{\lambda,m}(z)}{(1-z^2)}$$

d'effectuer une vérification de cohérence. Une dernière formule permet de « linéariser l'expression

$$\text{de la dérivée première : } C_v^{\lambda,m'}(z) = \frac{(\nu+2\lambda)(\nu+m+2\lambda-1)C_{\nu-1}^{\lambda,m}(z) - \nu(\nu-m+1)C_{\nu+1}^{\lambda,m}(z)}{2(\lambda+\nu)(1-z^2)}$$

Toutes les formules précédentes sont identiques avec les fonctions de Gegenbauer associées de deuxième espèce.

Construction des fonctions hyper-sphéroïdales angulaires de première espèce de degré et d'ordre entier sur l'intervalle [-1,+1]

Sur l'intervalle [-1,1], les fonctions angulaires de première espèce de degré et d'ordre entier peuvent se construire à l'aide d'un développement en fonctions de Gegenbauer associées:

$$\begin{cases} x \in [-1,1] & hps_n^{\lambda,m}(x, \gamma^2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k d_{n,k}^{\lambda,m}(\gamma^2) C_{n+2k}^{\lambda,m}(x) \\ \text{Fonctions associées de Gegenbauer} & C_{n+2k}^{\lambda,m}(x) \quad x \in [-1,1] \end{cases}$$

Les coefficients du développement se construisent à l'aide d'une récurrence :

$$\begin{cases} A_k d_{n,k-1}^{\lambda,m}(\gamma^2) + (B_k - \omega(\gamma^2)) d_{n,k}^{\lambda,m}(\gamma^2) + C_k d_{n,k+1}^{\lambda,m}(\gamma^2) = 0 & k \in \{-\infty, \dots, 0, 1, \dots, +\infty\} \\ A_k = -\gamma^2 \frac{(n-m+2k-1)(n-m+2k)}{(2n+4k+2\lambda-2)(2n+4k+2\lambda-4)} \\ B_k = (n+2k)(n+2k+2\lambda) - 2\gamma^2 \frac{(n+2k)(n+2k+2\lambda)+m^2-1+(2\lambda-1)(m+\lambda)}{(2n+4k+2\lambda-2)(2n+4k+2\lambda+2)} \\ C_k = -\gamma^2 \frac{(n+m+2k+2\lambda)(n+m+2k+2\lambda+1)}{(2n+4k+2\lambda+2)(2n+4k+2\lambda+4)} \end{cases}$$

Commentaire sur la récurrence :

Lorsque le paramètre λ est entier alors les coefficients A_k , C_k et B_k de la récurrence présente des pôles. Pour l'instant je traiterais ce cas par la suite. Lorsque le paramètre λ n'est pas un entier, il n'y a plus de pôles pour ces coefficients. Mais il demeure des cas où les coefficients A_k , C_k s'annulent et dans ce cas la série est limitée dans l'un des sens des indices. Je dirais que la série est unilatérale dans ce cas (vers l'infini ou moins l'infini).

Exprimons cette récurrence sous forme de deux fractions continues équivalentes sur les rapports de deux coefficients successifs :

Notons $f_k^{(-)} = \frac{d_{n,k}^{\lambda,m}(\gamma^2)}{d_{n,k-1}^{\lambda,m}(\gamma^2)}$ $f_k^{(+)} = \frac{d_{n,k}^{\lambda,m}(\gamma^2)}{d_{n,k+1}^{\lambda,m}(\gamma^2)}$

$$\begin{cases} k > 0 & \frac{d_{n,k}^{\lambda,m}(\gamma^2)}{d_{n,k-1}^{\lambda,m}(\gamma^2)} = - \frac{A_k}{B_k - \omega(\gamma^2) + C_k \frac{d_{n,k+1}^{\lambda,m}(\gamma^2)}{d_{n,k}^{\lambda,m}(\gamma^2)}} \Leftrightarrow f_k^{(-)} = - \frac{A_k}{B_k - \omega(\gamma^2) + C_k f_{k+1}^{(-)}} & \text{fraction continue descendante} \\ k < 0 & \frac{d_{n,k}^{\lambda,m}(\gamma^2)}{d_{n,k+1}^{\lambda,m}(\gamma^2)} = - \frac{C_k}{B_k - \omega(\gamma^2) + A_k \frac{d_{n,k-1}^{\lambda,m}(\gamma^2)}{d_{n,k}^{\lambda,m}(\gamma^2)}} \Leftrightarrow f_k^{(+)} = - \frac{C_k}{B_k - \omega(\gamma^2) + A_k f_{k-1}^{(+)}} & \text{fraction continue montante} \end{cases}$$

$$k > 0 \quad \frac{d_{n,k}^{\lambda,m}(\gamma^2)}{d_{n,0}^{\lambda,m}(\gamma^2)} = \prod_{l=1}^{l=k} f_k^{(-)} \quad \frac{d_{n,-k}^{\lambda,m}(\gamma^2)}{d_{n,0}^{\lambda,m}(\gamma^2)} = \prod_{l=1}^{l=k} f_{-l}^{(+)}$$

Annulation du terme C_k

Cette annulation n'est possible que si le paramètre λ est un demi-entier. Dans tous les autres cas excepté λ entier (voir cas à part), la série est bilatérale, soit se développe des indices $-\infty$ à $+\infty$. Lorsque λ est un demi-entier, soit $\lambda = (2p+1)/2$, C_k s'annule à l'indice k_0-1 alors les coefficients du développement s'annulent de même, pour les indices $k < k_0$. Lorsque C_k s'annule en k_0-1 , la valeur de k_0 est la suivante :

$$C_k = 0 \Leftrightarrow (n+m+2k+2\lambda)(n+m+2k+2\lambda+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k_0-1 = -\frac{n+m+2\lambda+1}{2} \\ n+m \text{ pair} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} k_0-1 = -\frac{n+m+2\lambda}{2} \\ n+m \text{ impair} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_0 = -\frac{n+m+2\lambda-1}{2} \\ n+m \text{ pair} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} k_0 = -\frac{n+m+2\lambda-2}{2} \\ n+m \text{ impair} \end{cases} \Leftrightarrow k_0 = -\left\lfloor \frac{n+m+2\lambda-1}{2} \right\rfloor$$

C'est bien notre cas lorsque l'on prend $n \geq m$, alors :

$$k_0 = -\left\lfloor \frac{n+m+2\lambda-1}{2} \right\rfloor \Rightarrow -k_0 = \left\lfloor \frac{n+m+2\lambda-1}{2} \right\rfloor$$

Mais il faut prendre garde à ce que certaines des fonctions de Gegenbauer associées sont nulles, lorsque n, m sont entier et λ demi-entier, car on sait que :

$$v, \mu, p \in \mathbb{N} \quad \lambda = \frac{2p+1}{2} \quad C_v^{\lambda, \mu}(z) = 0 \quad -\mu - (2\lambda - 1) \leq v < \mu$$

$$\Rightarrow C_{n+2k}^{\lambda, m}(x) = 0 \quad -m + (2\lambda - 1) \leq n + 2k < m \Leftrightarrow -m - n + (2\lambda - 1) \leq 2k < m - n$$

Ainsi les coefficients $d_{n,k}^{\lambda, m}(\gamma^2) / -n - m + (2\lambda - 1) \leq 2k < m - n$ ne sont pas utiles. Dans ces conditions la sommation ne commence donc qu'à l'indice :

$$k_0 = -R = -\left\lfloor \frac{n-m}{2} \right\rfloor = -\frac{n-m-\delta}{2} \quad \delta = (n-m) \bmod 2 = (n+m) \bmod 2 \Rightarrow R = \left\lfloor \frac{n-m}{2} \right\rfloor$$

Et le développement se présente sous la forme :

$$x \in [-1, 1] \quad hps_n^{\lambda, m}(x, \gamma^2) = \sum_{k=-\left\lfloor \frac{n-m}{2} \right\rfloor}^{+\infty} (-1)^k d_{n,k}^{\lambda, m}(\gamma^2) C_{n+2k}^{\lambda, m}(x)$$

Remarque : en changeant les indices de sommation du développement, il vient :

$$\begin{cases} \text{Si } n-m \text{ pair} \rightarrow k_0 = -\frac{n-m}{2} & n+2k_0 = m \quad l = k - k_0 \Rightarrow hps_n^{\lambda, m}(x, \gamma^2) = \sum_{l=0}^{+\infty} (-1)^{l+k_0} d_{n,l+k_0}^{\lambda, m}(\gamma^2) C_{m+2l}^{\lambda, m}(x) = \sum_{l=0}^{+\infty} c_{n,l}^{\lambda, m}(\gamma^2) C_{m+2l}^{\lambda, m}(x) \\ \text{Si } n-m \text{ impair} \rightarrow k_0 = -\frac{n-m}{2} + \frac{1}{2} & n+2k_0 = m+1 \quad l = k - k_0 \Rightarrow hps_n^{\lambda, m}(x, \gamma^2) = \sum_{l=0}^{+\infty} (-1)^{l+k_0} d_{n,l+k_0}^{\lambda, m}(\gamma^2) C_{m+2l+1}^{\lambda, m}(x) = \sum_{l=0}^{+\infty} c_{n,l}^{\lambda, m}(\gamma^2) C_{m+2l+1}^{\lambda, m}(x) \end{cases}$$

Ces deux expressions peuvent être données avec une notation suivante pas toujours très claire :

$$hps_n^{\lambda, m}(x, \gamma^2) = \sum_{l=0,1}^{+\infty} c_{n,l}^{\lambda, m}(\gamma^2) C_{m+l}^{\lambda, m}(x) = \begin{cases} \sum_{l=0,2,\dots}^{+\infty} c_{n,l}^{\lambda, m}(\gamma^2) C_{m+l}^{\lambda, m}(x) & \text{Si } n-m \text{ pair} \\ \sum_{l=1,3,5,\dots}^{+\infty} c_{n,l}^{\lambda, m}(\gamma^2) C_{m+l}^{\lambda, m}(x) & \text{Si } n-m \text{ impair} \end{cases}$$

Annulation du terme A_k

Et lorsque A_k s'annule à l'indice k_0+1 alors les coefficients du développement s'annulent pour $k > k_0$.
Cela donne :

$$A_k = 0 \Leftrightarrow (n-m+2k-1)(n-m+2k) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k_0+1 = \frac{1+m-n}{2} \\ m-n \text{ impair} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} k_0+1 = \frac{m-n}{2} \\ m-n \text{ pair} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_0 = \frac{m-n}{2} - \frac{1}{2} \\ m-n \text{ impair} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} k_0 = \frac{m-n}{2} - 1 \\ m-n \text{ pair} \end{cases} \Leftrightarrow k_0 = \left\lfloor \frac{m-n}{2} \right\rfloor - 1 \Leftrightarrow k_0 = \frac{m-n+\delta}{2} - 1 \text{ avec } \delta = (m-n) \bmod 2$$

Et le développement se présente sous la forme :

$$x \in [-1,1] \quad ps_n^m(x, \gamma^2) = \sum_{k=-\infty}^{\left\lfloor \frac{m-n-1}{2} \right\rfloor} (-1)^k d_{n,k}^{\lambda,m}(\gamma^2) C_{n+2k}^{\lambda,m}(x)$$

Mais là encore un certain nombre de fonctions de Gegenbauer associées sont uniformément nulles lorsque m et n sont entiers et λ demi-entier.

Comme $C_{n+2k}^{\lambda,m}(x) = 0 \quad -m-(2\lambda-1) \leq n+2k < m \Leftrightarrow -m-n-(2\lambda-1) \leq 2k < m-n$, on a la sommation commençant à l'indice $k_0 = -\left\lfloor \frac{m+n+2\lambda+1}{2} \right\rfloor$, soit un développement de la forme :

$$x \in [-1,1] \quad hps_n^{\lambda,m}(x, \gamma^2) = \sum_{k=-\infty}^{\left\lfloor \frac{m+n+2\lambda+1}{2} \right\rfloor} (-1)^k d_{n,k}^{\lambda,m}(\gamma^2) C_{n+2k}^{\lambda,m}(x)$$

Toutefois ce cas de figure du développement unilatéral vers les indices négatifs est totalement équivalent au précédent en raison de la relation de transformation suivante du degré n :

$$x \in [-1,1] \quad C_v^{\lambda,\mu}(x) = -\frac{\sin(\pi v)}{\sin(\pi(2\lambda+v))} C_{-v-2\lambda}^{\lambda,\mu}(x) \rightarrow n, m \in \mathbb{N} \Rightarrow C_n^{\lambda,n}(x) = -\frac{1}{\cos(2\lambda\pi)} C_{-n-2\lambda}^{\lambda,m}(x)$$

$$\rightarrow \lambda = \frac{2p+1}{2} \quad p \in \mathbb{N} \rightarrow C_n^{\lambda,n}(x) = C_{-n-2\lambda}^{\lambda,m}(x) \Rightarrow hps_n^{\lambda,m}(x, \gamma^2) = hps_{-n-2\lambda}^{\lambda,m}(x, \gamma^2)$$

$$\Rightarrow hps_{-n-2\lambda}^{\lambda,m}(x, \gamma^2) = \sum_{k=-\infty}^{\left\lfloor \frac{m-n+1}{2} \right\rfloor} (-1)^k d_{-n-2\lambda,k}^{\lambda,m}(\gamma^2) C_{-n-2\lambda+2k}^{\lambda,m}(x) \text{ Comme } C_{-n-2\lambda+2k}^{\lambda,m}(x) = C_{n+2k}^{\lambda,m}(x)$$

$$\Rightarrow hps_{-n-2\lambda}^{\lambda,m}(x, \gamma^2) = \sum_{k=\left\lfloor \frac{m-n+1}{2} \right\rfloor}^{k=+\infty} (-1)^k d_{-n-2\lambda,-k}^{\lambda,m}(\gamma^2) C_{n+2k}^{\lambda,m}(x)$$

Cette dernière expression donne un développement unilatéral équivalent vers les indices positifs.

Développement potentiellement fini lorsque $-m-2\lambda < n < m$, n, m entiers et λ demi-entier

Dans ce cas les coefficients C_k et A_k s'annulent. A_k s'annule en k_2+1 , la valeur de k_2 est la suivante : $k_2 = \left\lfloor \frac{m-n-1}{2} \right\rfloor$. C_k s'annule en k_1-1 , la valeur de k_1 est la suivante : $k_1 = -\left\lfloor \frac{n+m+2\lambda-1}{2} \right\rfloor$. Et le développement se présente sous la forme :

$$x \in [-1, 1] \quad hps_n^{\lambda, m}(x, \gamma^2) = \sum_{k=-\left\lfloor \frac{n+m+2\lambda-1}{2} \right\rfloor}^{\left\lfloor \frac{m-n-1}{2} \right\rfloor} (-1)^k d_{n,k}^{\lambda, m}(\gamma^2) C_{n+2k}^{\lambda, m}(x)$$

Or toutes les fonctions de Gegenbauer associées impliquées dans le développement fini sont uniformément nulles pour n, m entiers et λ demi-entier :

$$C_{n+2k}^{\lambda, m}(x) = 0 \quad -m - (2\lambda - 1) \leq n + 2k < m \Leftrightarrow -m - n - (2\lambda - 1) \leq 2k < m - n$$

$$\text{Car } -2\left\lfloor \frac{n+m+2\lambda-1}{2} \right\rfloor \geq -(m+n) - (2\lambda - 1) \quad \text{et} \quad 2\left\lfloor \frac{m-n-1}{2} \right\rfloor < m - n$$

Ce n'est donc pas essentiellement le développement qui est utile, mais plutôt la détermination des valeurs propres ω qui sont alors racines d'un polynôme. La matrice de détermination des valeurs propres est une matrice de taille finie entre les indices :

$$k_{\min} = -\left\lfloor \frac{n+m+2\lambda-1}{2} \right\rfloor \quad k_{\max} = \left\lfloor \frac{m-n-1}{2} \right\rfloor$$

Étant donné que la détermination des valeurs propres est indépendante selon la transformation $m \rightarrow m+1-2\lambda$, prenons la valeur maximale de m et de $-m+1-2\lambda$. Par ailleurs la taille de la matrice est de $N = \left\lfloor \frac{m-n-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+m+2\lambda-1}{2} \right\rfloor + 1 = m + \frac{2\lambda-1}{2}$. Il y a donc $m+(2\lambda-1)/2$ valeurs propres de cette matrice.

Ces valeurs propres sont indépendantes de n , qui ici ne joue qu'un rôle d'indice, compte tenu du fait que le système linéaire est identique par la transformation $n \rightarrow n-2\lambda$. Une quelconque des matrices

$$\text{Det} \left(M - \omega \mathbf{Id}_{m+\frac{2\lambda-1}{2}} \right) = 0$$

avec les paramètres respectant $-m-2\lambda < n < m$ donne le même déterminant et donc le même polynôme pour la détermination des valeurs propres.

Commençons par la valeur $m = 1 - \frac{2\lambda-1}{2}$ et posons par simplification $n = m - 1 = -\frac{2\lambda-1}{2}$

$$\text{Dans ce cas } k_{\min} = -\left\lfloor \frac{-\frac{2\lambda-1}{2} + 1 - \frac{2\lambda-1}{2} + 2\lambda-1}{2} \right\rfloor = -\left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = 0 \quad k_{\max} = \left\lfloor \frac{1 - \frac{2\lambda-1}{2} + \frac{2\lambda-1}{2} - 1}{2} \right\rfloor = 0 \quad \text{et}$$

$$\text{la matrice se réduit à un scalaire : } M - \omega \mathbf{Id}_1 = \left[\frac{1}{4} - \lambda^2 - \omega \right] \Rightarrow \omega = \frac{1}{4} - \lambda^2.$$

Si nous prenons la valeur : $m = 2 - \frac{2\lambda - 1}{2}$ et posons par simplification $n = m - 1 = 1 - \frac{2\lambda - 1}{2}$. La matrice est de taille 2x2 :

$$M - \omega \mathbf{Id}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} - \lambda^2 + 2\gamma^2 - \omega & -2\gamma^2 \\ 2\gamma^2 & \frac{9}{4} - \lambda^2 - 2\gamma^2 - \omega \end{bmatrix}$$

L'annulation du déterminant donne la recherche du polynôme suivant :

$$\text{Det} \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{4} - \lambda^2 + 2\gamma^2 - \omega & -2\gamma^2 \\ 2\gamma^2 & \frac{9}{4} - \lambda^2 - 2\gamma^2 - \omega \end{bmatrix} \right) = \omega^2 + \omega \left(2\lambda^2 - \frac{5}{2} \right) + \lambda^4 - \frac{5}{2}\lambda^2 + 4\gamma^2 + \frac{9}{16} = 0$$

Soit les deux racines ω : $\omega_1 = \frac{5}{4} - \lambda^2 - \sqrt{1 - 4\gamma^2}$ $\omega_2 = \frac{5}{4} - \lambda^2 + \sqrt{1 - 4\gamma^2}$

Si nous prenons la valeur : $m = 3 - \frac{2\lambda - 1}{2}$ et posons par simplification $n = m - 1 = 2 - \frac{2\lambda - 1}{2}$. La matrice est de taille 3x3 :

$$M - \omega \mathbf{Id}_3 = \begin{bmatrix} \frac{9}{4} - \lambda^2 - 4\gamma^2 - \omega & 6\gamma^2 & 0 \\ -4\gamma^2 & \frac{1}{4} + \frac{16}{3}\gamma^2 - \lambda^2 - \omega & -\frac{4}{3}\gamma^2 \\ 0 & -\frac{2}{3}\gamma^2 & \frac{25}{4} - \frac{4}{3}\gamma^2 - \lambda^2 - \omega \end{bmatrix}$$

Construction des fonctions hyper-sphéroïdales angulaires de première espèce de degré et d'ordre non-entier et λ quelconque

Considérons maintenant les deux paramètres n et m comme non-entier et notons les ν et μ . Sur l'intervalle $[-1,1]$, les fonctions angulaires de première espèce de degré ν et d'ordre μ peuvent se construire à l'aide d'un développement en fonctions de Gegenbauer associées de degré ν et d'ordre μ :

$$\begin{cases} x \in [-1,1] & hps_{\nu}^{\lambda,\mu}(x, \gamma^2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k d_{\nu,k}^{\lambda,\mu}(\gamma^2) C_{\nu+2k}^{\lambda,\mu}(x) \\ \text{Fonctions associées de Gegenbauer} & C_{\nu+2k}^{\lambda,\mu}(x) \quad x \in [-1,1] \end{cases}$$

Les coefficients du développement se construisent à l'aide de la même récurrence avec les deux paramètres ν et μ :

$$\begin{aligned} A_k d_{\nu,k-1}^{\lambda,\mu}(\gamma^2) + (B_k - \omega(\gamma^2)) d_{\nu,k}^{\lambda,\mu}(\gamma^2) + C_k d_{\nu,k+1}^{\lambda,\mu}(\gamma^2) &= 0 \quad k \in \{-\infty, \dots, 0, 1, \dots, +\infty\} \\ \begin{cases} A_k = -\gamma^2 \frac{(\nu - \mu + 2k - 1)(\nu - \mu + 2k)}{(2\nu + 4k + 2\lambda - 2)(2\nu + 4k + 2\lambda - 4)} \\ B_k = (\nu + 2k)(\nu + 2k + 2\lambda) - 2\gamma^2 \frac{(\nu + 2k)(\nu + 2k + 2\lambda) + \mu^2 - 1 + (2\lambda - 1)(\mu + \lambda)}{(2\nu + 4k + 2\lambda - 2)(2\nu + 4k + 2\lambda + 2)} \\ C_k = -\gamma^2 \frac{(\nu + \mu + 2k + 2\lambda)(\nu + \mu + 2k + 2\lambda + 1)}{(2\nu + 4k + 2\lambda + 2)(2\nu + 4k + 2\lambda + 4)} \end{cases} \end{aligned}$$

La condition pour qu'une telle récurrence puisse être définie quelque soit l'indice k positif ou négatif est que **$\nu + \lambda$ ne soit pas un entier**.

Voyons les conditions lorsque $-\mu - 2\lambda < \nu < \mu$ pour lesquelles les coefficients C_k et A_k s'annulent simultanément. Si les coefficients C_k et A_k s'annulent, alors A_k s'annule en $k_{\max} + 1$, avec $k_{\max} = \left\lfloor \frac{\mu - \nu - 1}{2} \right\rfloor$ et C_k s'annule en $k_{\min} - 1$ avec $k_{\min} = -\left\lfloor \frac{\nu + \mu + 2\lambda - 1}{2} \right\rfloor$. Cela implique donc les deux

$$\text{contraintes : } \begin{cases} \mu - \nu \in \mathbb{N} \\ \nu + \mu + 2\lambda - 1 \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(\mu + \lambda) \in \mathbb{N} \\ 2(\nu + \lambda) \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Et la détermination des valeurs propres ω qui sont alors racines d'un polynôme. La matrice de détermination des valeurs propres est une matrice de taille finie entre les indices :

$$k_{\min} = -\left\lfloor \frac{\mu + \nu + 2\lambda - 1}{2} \right\rfloor \quad k_{\max} = \left\lfloor \frac{\mu - \nu - 1}{2} \right\rfloor$$

Étant donné que les valeurs propres sont identiques suivant la transformation $\mu \rightarrow -\mu + 1 - 2\lambda$, prenons la valeur maximale de μ et de $-\mu + 1 - 2\lambda$. λ n'étant pas un demi-entier, la taille de la matrice est de $N = \left\lfloor \frac{\mu - \nu - 1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\mu + \nu + 2\lambda - 1}{2} \right\rfloor + 1$ qui est également le nombre de valeurs propres.

Une quelconque des matrices avec les paramètres respectant $-\mu - 2\lambda < \nu < \mu$ donne le même déterminant $N = \left\lfloor \frac{\mu - \nu - 1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\mu + \nu + 2\lambda - 1}{2} \right\rfloor + 1$ $\text{Det}(M - \omega \mathbf{Id}_N) = 0$ et donc le même polynôme pour la détermination des valeurs propres.

Commençons par les valeurs $\mu + \lambda = \frac{3}{2}$ $\mu = \nu + 1$. Dans ce cas $k_{\min} = k_{\max} = 0$ et la matrice se réduit à un scalaire : $M - \omega \mathbf{Id}_1 = \left[\frac{1}{4} - \lambda^2 - \omega \right] \Rightarrow \omega = \frac{1}{4} - \lambda^2$. Si nous prenons la valeur : $\mu + \lambda = \frac{5}{2}$ et $\mu = \nu + 1$, la matrice est de taille 2x2 :

$$M - \omega \mathbf{Id}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} - \lambda^2 + 2\gamma^2 - \omega & -2\gamma^2 \\ 2\gamma^2 & \frac{9}{4} - \lambda^2 - 2\gamma^2 - \omega \end{bmatrix}$$

L'annulation du déterminant donne les deux racines ω : $\omega_{1,2} = \frac{5}{4} - \lambda^2 \pm \sqrt{1 - 4\gamma^2}$.

Si nous prenons les valeurs $\mu + \lambda = \frac{7}{2}$ $\mu = \nu + 1$, la matrice est de taille 3x3 :

$$M - \omega \mathbf{Id}_3 = \begin{bmatrix} \frac{9}{4} - \lambda^2 - 4\gamma^2 - \omega & 6\gamma^2 & 0 \\ -4\gamma^2 & \frac{1}{4} + \frac{16}{3}\gamma^2 - \lambda^2 - \omega & -\frac{4}{3}\gamma^2 \\ 0 & -\frac{2}{3}\gamma^2 & \frac{25}{4} - \frac{4}{3}\gamma^2 - \lambda^2 - \omega \end{bmatrix}$$

Évidemment ce sont les même valeurs que l'on obtient par rapport aux valeurs des paramètres μ et ν entiers mais ici dans un cadre plus général lorsque $\mu + \lambda$ et donc $\nu + \lambda$ sont demi-entier.

Dans le cas où $\nu + \lambda$ est entier non nul $\nu + \lambda > 0$ positif ou négatif $\nu + \lambda < 0$ et entier alors la matrice est de taille supérieure ou égal à 2x2 et le parcours de la récurrence comporte des indices k négatifs ou positifs qui provoque la divergence au pôle du terme en question. La seule manière pour que la récurrence ne comporte pas de pôle est :

$$k_{\min} = -\left\lfloor \frac{l-2p-1}{2} \right\rfloor = -\left\lfloor \frac{l-1}{2} \right\rfloor + p = k_{\max} = \left\lfloor \frac{l-1}{2} \right\rfloor = 0 \Rightarrow l = 1, 2 \quad p = 0$$

Toutefois lorsque $\nu + \lambda = 0$ $\mu + \lambda = 1$, on voit plus tard dans ce document que la récurrence se simplifie et que les termes C_k et A_k ne s'annulent pas mais demeurent constant. La récurrence est infini dans les deux sens, elle est similaire à celle des fonctions de Mathieu, qui servent à construire la solution de première et deuxième espèce.

Cela confirme donc le fait que **lorsque $\nu + \lambda$ est un entier la récurrence n'est pas définie et ne peut servir à la construction des fonctions hyper-sphéroïdales**

Choix de normalisation des fonctions hyper-sphéroïdales de première espèce pour de degré et d'ordre entiers

Normalisation selon « Meixner et Schafke » des fonctions hyper-sphéroïdales de première espèce et de degré et d'ordre entiers

En l'occurrence la normalisation proposée des fonctions hyper-sphéroïdales de première espèce de degré et d'ordre entier est calquée sur la normalisation des fonctions de Gegenbauer associées qui sont asymptotes pour le paramètre $\gamma \rightarrow 0$. Cette préconisation suit l'exemple de « Meixner et Schafke » pour les fonctions sphéroïdales :

$$\int_{-1}^{+1} dx (1-x^2)^{\frac{2\lambda-1}{2}} (C_n^{\lambda,m}(x))^2 = 2^{1-2\lambda} \frac{\pi}{(\Gamma(\lambda))^2} \frac{2}{2\lambda+2n} \frac{\Gamma(n+m+2\lambda)}{\Gamma(n-m+1)}$$

Cela se traduit par la normalisation suivante :

$$\int_{-1}^{+1} dx (1-x^2)^{\frac{2\lambda-1}{2}} (hps_n^{\lambda,m}(x, \gamma^2))^2 = 2^{1-2\lambda} \frac{2}{2\lambda+2n} \frac{\pi}{(\Gamma(\lambda))^2} \frac{\Gamma(n+m+2\lambda)}{\Gamma(n-m+1)}$$

Qui donne la condition suivante sur les coefficients du développement :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} dx (1-x^2)^{\frac{2\lambda-1}{2}} (hps_n^{\lambda,m}(x, \gamma^2))^2 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (d_{n,k}^{\lambda,m}(\gamma^2))^2 2^{1-2\lambda} \frac{2}{2\lambda+2n+4k} \frac{\pi}{(\Gamma(\lambda))^2} \frac{\Gamma(n+2k+m+2\lambda)}{\Gamma(n+2k-m+1)} = 2^{1-2\lambda} \frac{2}{2\lambda+2n} \frac{\pi}{(\Gamma(\lambda))^2} \frac{\Gamma(n+m+2\lambda)}{\Gamma(n-m+1)} \\ \Leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (d_{n,k}^{\lambda,m}(\gamma^2))^2 \frac{1}{2\lambda+2n+4k} \frac{\Gamma(n+2k+m+2\lambda)}{\Gamma(n+2k-m+1)} &= \frac{1}{2\lambda+2n} \frac{\Gamma(n+m+2\lambda)}{\Gamma(n-m+1)} \\ \Leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (d_{n,k}^{\lambda,m}(\gamma^2))^2 \frac{2\lambda+2n}{2\lambda+2n+4k} \frac{\Gamma(n+2k+m+2\lambda)}{\Gamma(n+2k-m+1)} \frac{\Gamma(n-m+1)}{\Gamma(n+m+2\lambda)} &= 1 \end{aligned}$$

Évidemment lorsque le développement est unilatéral, la condition de normalisation pour la fonction de première espèce s'écrit sous la forme :

$$\sum_{k=\left\lfloor \frac{n-m}{2} \right\rfloor}^{+\infty} (d_{n,k}^{\lambda,m}(\gamma^2))^2 \frac{2\lambda+2n}{2\lambda+2n+4k} \frac{\Gamma(n+2k+m+2\lambda)}{\Gamma(n+2k-m+1)} \frac{\Gamma(n-m+1)}{\Gamma(n+m+2\lambda)} = \sum_{k=\left\lfloor \frac{n-m}{2} \right\rfloor}^{+\infty} (d_{n,k}^{\lambda,m}(\gamma^2))^2 \frac{\lambda+n}{\lambda+n+2k} \frac{(n+m+2\lambda)_{2k}}{(n-m+1)_{2k}} = 1$$

La relation sur les coefficients du développement peut alors être étendue au cas où le degré et l'ordre ne sont pas entier, à savoir :

$$\begin{cases} (v+\mu+2\lambda)_{2k} = \frac{\Gamma(v+2k+\mu+2\lambda)}{\Gamma(v+\mu+1)} & (v-\mu+1)_{2k} = \frac{\Gamma(v+2k-\mu+1)}{\Gamma(v-\mu+1)} \\ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (d_{v,k}^{\lambda,\mu}(\gamma^2))^2 \frac{v+\lambda}{v+2k+\lambda} \frac{(v+\mu+2\lambda)_{2k}}{(v-\mu+1)_{2k}} = 1 \end{cases}$$

Le schéma de calcul numérique est alors simple, on calcule d'abord les coefficients d'après la récurrence en prenant une valeur de départ donnée, puis on divise chacun des coefficients par la racine carrée de la sommation établie plus haut.

Normalisation de Flammer dans le cas des fonctions hyper-sphéroïdales de degré et d'ordre entiers

La normalisation de Flammer est basée sur le comportement des fonctions hyper-sphéroïdales à l'approche de $x=0$, soit pour la valeur de fonction ou de sa dérivée première, en fonction de la parité de la fonction hyper-sphéroïdale suivant la parité de $v-\mu$. La valeur de la fonction sphéroïdale ou de sa dérivée première est égale, à un signe près, à celle de la fonction de Gegenbauer associée ou de sa dérivée première. On écrit ainsi :

$$v, \mu \in \mathbf{N} \quad \begin{cases} v-\mu \text{ pair} & hps_v^{\lambda, \mu}(0, \gamma^2) = (-1)^\mu C_v^{\lambda, \mu}(0) \\ v-\mu \text{ pair} & \frac{\partial hps_v^{\lambda, \mu}(0, \gamma^2)}{\partial x} = (-1)^\mu C_v^{\lambda, \mu'}(0) \end{cases}$$

Comme :

$$\begin{cases} C_v^{\lambda, \mu}(0) = \frac{e^{i\pi\mu} \times 2^v \sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} \times \frac{\Gamma\left(\frac{v+\mu+2\lambda}{2}\right)}{\Gamma(v-\mu+1) \times \Gamma\left(\frac{1+\mu-v}{2}\right)} \\ C_v^{\lambda, \mu'}(0) = (\mu+v+2\lambda-1) C_{v-1}^{\lambda, \mu}(0) = (v+\mu+2\lambda-1) \times \frac{e^{i\pi\mu} \times 2^{v-1} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} \times \frac{\Gamma\left(\frac{v+\mu+2\lambda-1}{2}\right)}{\Gamma(v-\mu) \times \Gamma\left(1+\frac{\mu-v}{2}\right)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_{v+2k}^{\lambda, \mu}(0) = \frac{e^{i\pi\mu} \times 2^{v+2k} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} \times \frac{\Gamma\left(\frac{v+\mu+2\lambda}{2} + k\right)}{\Gamma(v-\mu+1+2k) \times \Gamma\left(\frac{1+\mu-v}{2} - k\right)} \\ C_{v+2k}^{\lambda, \mu'}(0) = (v+\mu+2\lambda-1+2k) \times \frac{e^{i\pi\mu} \times 2^{v+2k-1} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} \times \frac{\Gamma\left(\frac{v+\mu+2\lambda-1}{2} + k\right)}{\Gamma(v-\mu+2k) \times \Gamma\left(1+\frac{\mu-v}{2} - k\right)} \end{cases}$$

Il vient la relation sur les coefficients du développement :

$$hps_v^{\lambda, \mu}(x, \gamma^2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k d_{v,k}^{\lambda, \mu}(\gamma^2) C_{v+2k}^{\lambda, \mu}(x)$$

$$\begin{cases} v-\mu \text{ pair} & hps_v^{\lambda, \mu}(0, \gamma^2) = \sum_{k=-R}^{+\infty} (-1)^k 2^{2k} \frac{\Gamma\left(\frac{v+\mu+2\lambda}{2} + k\right)}{\Gamma(v-\mu+1+2k) \times \Gamma\left(\frac{1+\mu-v}{2} - k\right)} \times d_{v,k}^{\lambda, \mu}(\gamma^2) = \frac{(-1)^\mu \Gamma\left(\frac{v+\mu+2\lambda}{2}\right)}{\Gamma(v-\mu+1) \times \Gamma\left(\frac{1+\mu-v}{2}\right)} \\ v-\mu \text{ impair} & \frac{\partial hps_v^{\lambda, \mu}(0, \gamma^2)}{\partial x} = \sum_{k=-R}^{+\infty} (-1)^k 2^{2k} \frac{\Gamma\left(\frac{v+\mu+2\lambda-1}{2} + k\right)}{\Gamma(v-\mu+2k) \times \Gamma\left(1+\frac{\mu-v}{2} - k\right)} \times (v+\mu+2\lambda-1+2k) \times d_{v,k}^{\lambda, \mu}(\gamma^2) = (v+\mu+2\lambda-1) \times \frac{(-1)^\mu \Gamma\left(\frac{v+\mu+2\lambda-1}{2}\right)}{\Gamma(v-\mu) \times \Gamma\left(1+\frac{\mu-v}{2}\right)} \end{cases}$$

Ces relations permet de définir sans condition supplémentaire le signe des coefficients du développement.

Normalisation de Chu et Stratton dans le cas des fonctions hyper-sphéroïdales de degré et d'ordre entiers

La normalisation de Chu et Stratton contrairement à celle de Flammer est basée sur le comportement des fonctions hyper-sphéroïdales à l'approche de $x=1$, même si les fonctions hyper-sphéroïdales s'annulent en $x=1$. La normalisation est liée au comportement des fonctions de Gegenbauer associées à l'approche de $x=1$. Il se trouve que dans le développement en fonctions de Gegenbauer associées, on peut introduire des polynômes de Gegenbauer. Partons des expressions de la fonction de Gegenbauer associée à l'aide de la fonction de Legendre associée :

$$C_v^{\lambda,\mu}(x) = (-1)^\mu \times \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} \times \frac{\Gamma(v+\mu+2\lambda)}{\Gamma(v-\mu+1)} (1-x^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{\lambda+v-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(x)$$

$$C_v^{\lambda,\mu}(x) = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \times \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} (1-x^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{\lambda+v-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(x)$$

Alors on peut directement relier la fonction de Gegenbauer associée avec la fonction de Gegenbauer :

$$C_v^\lambda(x) = \frac{2^{\frac{1-\lambda}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} \times \frac{\Gamma(v+2\lambda)}{\Gamma(v+1)} \times (1-x^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} \times P_{\lambda+v-\frac{1}{2}}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(x) \Rightarrow P_{\lambda+v-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(x) = \frac{\Gamma(\lambda)}{2^{\frac{1-\lambda}{2}} \sqrt{\pi}} \times \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v+2\lambda)} \times (1-x^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} \times C_v^\lambda(x)$$

$$\begin{cases} \lambda \rightarrow \lambda + \mu \\ \nu \rightarrow \nu - \mu \end{cases} \Rightarrow P_{\lambda+v-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(x) = \frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{2^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu} \sqrt{\pi}} \times \frac{\Gamma(v-\mu+1)}{\Gamma(v+\mu+2\lambda)} \times (1-x^2)^{\frac{1-2(\lambda+\mu)}{4}} \times C_{\nu-\mu}^{\lambda+\mu}(x)$$

$$\begin{cases} \mu \rightarrow -\mu - 2\lambda + 1 \\ -\mu \rightarrow +\mu + 2\lambda - 1 \end{cases} \Rightarrow P_{\lambda+v-\frac{1}{2}}^{\lambda+\mu-\frac{1}{2}}(x) = \frac{\Gamma(1-\mu-\lambda)}{2^{\mu+\lambda-\frac{1}{2}} \sqrt{\pi}} \times \frac{\Gamma(v+\mu+2\lambda)}{\Gamma(v-\mu+1)} \times (1-x^2)^{\frac{1-2(\lambda+\mu)}{4}} \times C_{\nu+\mu+2\lambda-1}^{\lambda-\mu-2\lambda+1}(x)$$

$$C_v^{\lambda,\mu}(x) = (-1)^\mu \times \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} \times \frac{\Gamma(v+\mu+2\lambda)}{\Gamma(v-\mu+1)} (1-x^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{\lambda+v-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(x) \Rightarrow C_v^{\lambda,\mu}(x) = (-1)^\mu 2^\mu \times \frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda)} \times (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} \times C_{\nu-\mu}^{\lambda+\mu}(x)$$

$$C_v^{\lambda,\mu}(x) = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \times \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} (1-x^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{\lambda+v-\frac{1}{2}}^{\lambda+\mu-\frac{1}{2}}(x) \Rightarrow C_v^{\lambda,\mu}(x) = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \times \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}}{\Gamma(\lambda)} \times \frac{\Gamma(1-\mu-\lambda)}{2^{\mu+\lambda-\frac{1}{2}}} \times \frac{\Gamma(v+\mu+2\lambda)}{\Gamma(v-\mu+1)} \times (1-x^2)^{\frac{1-2\lambda-\mu}{2}} \times C_{\nu+\mu+2\lambda-1}^{\lambda-\mu-2\lambda+1}(x)$$

En prenant la première expression on a donc établi que :

$$C_v^{\lambda,\mu}(x) = (-1)^\mu 2^\mu \frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda)} \times (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} \times C_{\nu-\mu}^{\lambda+\mu}(x) \rightarrow C_{\nu+2k}^{\lambda,\mu}(x) = (-1)^\mu 2^\mu \times \frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda)} (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} \times C_{\nu-\mu+2k}^{\lambda+\mu}(x)$$

$$\text{Alors : } hps_v^{\lambda,\mu}(x, \gamma^2) = (-1)^\mu 2^\mu \times \frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda)} \times (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} \times \sum_{k=-R}^{+\infty} (-1)^k d_{\nu,k}^{\lambda,\mu}(\gamma^2) C_{\nu-\mu+2k}^{\lambda+\mu}(x)$$

Comme $C_{\nu-\mu+2k}^{\mu+\lambda}(1) = \frac{2^{1-2(\mu+\lambda)} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\mu+\lambda) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu + \lambda\right)} \frac{\Gamma(v+\mu+2\lambda+2k)}{\Gamma(v-\mu+1+2k)}$ et qu'à la limite $\gamma \rightarrow 0$, on ne retient que

le terme $k=0$, il vient : $\lim_{\gamma \rightarrow 0} d_{\nu,0}^{\lambda,\mu}(\gamma^2) = 1 \rightarrow \lim_{\gamma \rightarrow 0} hps_v^{\lambda,\mu}(x, \gamma^2) = (-1)^\mu 2^\mu \times \frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda)} \times (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} \times C_{\nu-\mu}^{\lambda+\mu}(x)$.

Il vient la relation sur les coefficients du développement au passage à la limite $x=1$:

$$\sum_{k=-R}^{+\infty} (-1)^k d_{\nu,k}^{\lambda,\mu}(\gamma^2) C_{\nu-\mu+2k}^{\lambda+\mu}(1) = C_{\nu-\mu}^{\lambda+\mu}(1) \Leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k d_{\nu,k}^{\lambda,\mu}(\gamma^2) \frac{\Gamma(\nu+\mu+2\lambda+2k)}{\Gamma(\nu-\mu+1+2k)} = \frac{\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}$$

Cela peut également se traduire par la relation fonctionnelle de passage à la limite en $x=1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1} (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} hps_{\nu}^{\lambda,\mu}(x, \gamma^2) = \lim_{x \rightarrow 1} (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} C_{\nu}^{\lambda,\mu}(x) = (-1)^{\mu} 2^{-\mu-2\lambda+1} \times \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} \times \frac{1}{\Gamma\left(\mu+\lambda+\frac{1}{2}\right)} \times \frac{\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)} \\ \lim_{x \rightarrow 1} (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} C_{\nu+2k}^{\lambda,\mu}(x) = (-1)^{\mu} 2^{-\mu-2\lambda+1} \times \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} \times \frac{1}{\Gamma\left(\mu+\lambda+\frac{1}{2}\right)} \times \frac{\Gamma(\nu+\mu+2\lambda+2k)}{\Gamma(\nu-\mu+1+2k)} \end{array} \right.$$

Cette relation permet de définir sans condition supplémentaire le signe des coefficients du développement.

Construction des fonctions hyper-sphéroïdales angulaires de deuxième espèce de degré et d'ordre entier

Sur l'intervalle $[-1,1]$, les fonctions angulaires de deuxième espèce de degré et d'ordre entier peuvent se construire à l'aide d'un développement en fonctions de Gegenbauer associées de deuxième espèce dont les coefficients suivent également la même règle de récurrence. On part d'un développement de la forme :

$$\begin{cases} x \in [-1,1] & hqs_n^{\lambda,m}(x, \gamma^2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k d_{n,k}^{\lambda,m}(\gamma^2) C_{(Q),n+2k}^{\lambda,m}(x) \\ \text{Fonctions associées de Gegenbauer de deuxième espèce} & C_{(Q),n+2k}^{\lambda,m}(x) \quad x \in [-1,1] \end{cases}$$

Deux cas peuvent alors se distinguer.

Le premier cas correspond aux valeurs du paramètre λ qui ne sont ni entières, ni demi-entières et les valeurs de n et m sont entières. Alors les conditions pour lesquelles les fonctions de Gegenbauer associées de deuxième espèce ne sont pas définies sont : $n, m \in \mathbf{N} \quad n < m$. Comme on se place justement dans le cas $n > m$ alors le développement précédent est valable quelque soit les valeur $n \geq m$ et il est infini dans les deux directions.

Le deuxième cas correspond aux valeurs du paramètre λ qui sont demi-entières et les valeurs de n et m sont entières. Mais si dans le cas des degrés et ordre entiers, la liste s'arrête à partir d'un indice négatif k_0 pour la fonction de première espèce :

$$x \in [-1,1] \quad hps_n^{\lambda,m}(x, \gamma^2) = \sum_{k=k_0=-\left\lfloor \frac{n+m+2\lambda-1}{2} \right\rfloor}^{+\infty} (-1)^k d_{n,k}^{\lambda,m}(\gamma^2) C_{n+2k}^{\lambda,m}(x)$$

il n'y a aucune raison qu'il en soit de même pour la fonction de deuxième espèce. Aussi doit-on prendre un développement infini dans les deux directions. Mais pour les valeurs d'indice pour lesquels :

$$\begin{cases} m+n+2k+2\lambda-1 \in \mathbf{N} \\ m+n+2k+2\lambda-1 < 0 \end{cases}$$

Les fonctions de Gegenbauer associées ne sont pas définies. On constate que la limite de définition des fonctions de Gegenbauer associées de deuxième espèce coïncide avec la limite des indices de la série pour la fonction hyper-sphéroïdale de première espèce. Aussi lorsque l'on sépare le développement en deux parties :

$$\begin{cases} hqs_n^{\lambda,m}(x, \gamma^2) = \sum_{k=-\infty}^{k=-M-1} (-1)^k d_{n,k}^{\lambda,m}(\gamma^2) C_{(Q),n+2k}^{\lambda,m}(x) + \sum_{k=-M}^{+\infty} (-1)^k d_{n,k}^{\lambda,m}(\gamma^2) C_{(Q),n+2k}^{\lambda,m}(x) \\ M = \left\lfloor \frac{n+m+2\lambda-1}{2} \right\rfloor \end{cases}$$

Le premier développement n'est constitué que de fonctions de Gegenbauer associées de deuxième espèce non définies.

Prenons alors cette première série et réalisons formellement un passage à la limite :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{k=-M-1} (-1)^k d_{n,k}^{\lambda,m}(\gamma^2) C_{(Q),n+2k+\varepsilon}^{\lambda,m}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{k=-M-1} (-1)^k d_{n,k}^{\lambda,m}(\gamma^2) C_{(Q),v(\varepsilon)}^{\lambda,m}(x)$$

$$\Rightarrow -v(\varepsilon) - 2\lambda = n + 2k + \varepsilon \Rightarrow v(\varepsilon) = -n - 2k - 2\lambda - \varepsilon$$

L'astuce consiste à utiliser les formules suivantes de transformation des fonctions de Gegenbauer associées de première et deuxième espèce pour les domaines de valeurs des paramètres v , μ et λ , pour $z \in [-1, +1]$:

$$\begin{cases} v, \mu \in \mathbf{R} & \lambda = \frac{2p+1}{2} & p \in \mathbf{N} & C_{-v-2\lambda}^{\lambda,m}(z) = C_v^{\lambda,m}(z) \\ v, \mu \in \mathbf{R} & \lambda = \frac{2p+1}{2} & p \in \mathbf{N} & C_{(Q),-v-2\lambda}^{\lambda,\mu}(z) = \frac{\pi \cos(\mu \pi) \cos(v \pi) C_v^{\lambda,\mu}(z) - \sin((\mu+v)\pi) C_{(Q),v}^{\lambda,\mu}(z)}{\sin((\mu-v)\pi)} \end{cases}$$

Cela donne :

$$C_{(Q),n+2k+\varepsilon}^{\lambda,m}(x) = \frac{\pi \cos(m\pi) \cos(\pi(-n-2k-2\lambda-\varepsilon)) C_{-n-2k-2\lambda-\varepsilon}^{\lambda,m}(x) - \sin(\pi(m-n-2k-2\lambda-\varepsilon)) C_{(Q),-n-2k-2\lambda-\varepsilon}^{\lambda,m}(x)}{\sin(\pi(m+n+2k+\varepsilon+2\lambda))}$$

$$\Rightarrow C_{(Q),n+2k+\varepsilon}^{\lambda,m}(x) = \pi \frac{\cos(m\pi) \cos(\pi(n+2\lambda+\varepsilon))}{\sin((m+n+2\lambda+\varepsilon)\pi)} C_{-n-2k-2\lambda-\varepsilon}^{\lambda,m}(x) - \frac{\sin((m-n-2\lambda-\varepsilon)\pi)}{\sin((m+n+2\lambda+\varepsilon)\pi)} C_{(Q),-n-2k-2\lambda-\varepsilon}^{\lambda,m}(x)$$

$$\Rightarrow C_{(Q),n+2k+\varepsilon}^{\lambda,m}(x) = \pi \frac{\cos((m+n+2\lambda+\varepsilon)\pi)}{\sin((m+n+2\lambda+\varepsilon)\pi)} C_{-n-2k-2\lambda-\varepsilon}^{\lambda,m}(x) - \frac{\sin((m+n+2\lambda-\varepsilon)\pi)}{\sin((m+n+2\lambda+\varepsilon)\pi)} C_{(Q),-n-2k-2\lambda-\varepsilon}^{\lambda,m}(x)$$

$$\Rightarrow C_{(Q),n+2k+\varepsilon}^{\lambda,m}(x) \approx \frac{C_{-n-2k-2\lambda}^{\lambda,m}(x)}{\varepsilon} + C_{(Q),-n-2k-2\lambda}^{\lambda,m}(x)$$

Injectons cela dans la série et effectuons un changement de coefficient par passage à la limite :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{k=-M-1} (-1)^k d_{n,k}^{\lambda,m}(\gamma^2) C_{(Q),n+2k+\varepsilon}^{\lambda,m}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{k=-M-1} (-1)^k \frac{d_{n,k}^{\lambda,m}(\gamma^2)}{\varepsilon} (C_{-n-2k-2\lambda}^{\lambda,m}(x) + \varepsilon C_{(Q),-n-2k-2\lambda}^{\lambda,m}(x))$$

$$\text{Supposons } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d_{n,k}^{\lambda,m}(\gamma^2)}{\varepsilon} = \tilde{d}_{n,k}^{\lambda,m}(\gamma^2) \Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{k=-M-1} (-1)^k d_{n,k}^{\lambda,m}(\gamma^2) C_{(Q),n+2k+\varepsilon}^{\lambda,m}(x) = \sum_{k=-\infty}^{k=-M-1} (-1)^k \tilde{d}_{n,k}^{\lambda,m}(\gamma^2) C_{-n-2k-2\lambda}^{\lambda,m}(x)$$

L'expression du développement de la fonction sphéroïdale de deuxième espèce devient donc :

$$hqS_n^{\lambda,m}(x, \gamma^2) = \sum_{k=-\infty}^{k=-M-1} (-1)^k \tilde{d}_{n,k}^{\lambda,m}(\gamma^2) C_{-n-2k-2\lambda}^{\lambda,m}(x) + \sum_{k=-M}^{+\infty} (-1)^k d_{n,k}^{\lambda,m}(\gamma^2) C_{(Q),n+2k}^{\lambda,m}(x) \quad \text{avec} \quad M = \left\lfloor \frac{n+m+2\lambda-1}{2} \right\rfloor$$

Il reste à déterminer la méthode de construction des deux jeux de coefficients et la normalisation.

Les coefficients $d_{n,k}^{\lambda,m}(\gamma^2)$ sont construits de la même manière que pour la fonction de première espèce, à l'aide de deux fractions continues descendante et montante :

$$\begin{cases} f_k^{(-)} = \frac{d_{n,k}^{\lambda,m}(\gamma^2)}{d_{n,k-1}^{\lambda,m}(\gamma^2)} & f_k^{(-)} = -\frac{A_k}{B_k - \omega(\gamma^2) + C_k f_{k+1}^{(+)}} & k \in [1, k_{\max}] \\ f_k^{(+)} = \frac{d_{n,k}^{\lambda,m}(\gamma^2)}{d_{n,k-1}^{\lambda,m}(\gamma^2)} & f_k^{(+)} = -\frac{C_k}{B_k - \omega(\gamma^2) + A_k f_{k-1}^{(+)}} & k \in [-M, -1] \end{cases}$$

Les coefficients $\tilde{d}_{n,k}^{\lambda,m}(\gamma^2)$ sont construits à l'aide de la fraction continue montante, en commençant à la valeur nulle pour un terme d'indice extrême suffisamment négatif.

$$\begin{cases} \tilde{f}_k^{(+)} = \frac{\tilde{d}_{n,k}^{\lambda,m}(\gamma^2)}{\tilde{d}_{n,k+1}^{\lambda,m}(\gamma^2)} & \tilde{f}_k^{(+)} = -\frac{C_k}{B_k - \omega(\gamma^2) + A_k \tilde{f}_{k-1}^{(+)}} \\ k \in [-k_{Max} - M - 1, -M - 2] \end{cases}$$

Cette fraction continue se connecte à la fraction continue ascendante comme suit :

$$C_k = -\gamma^2 \frac{(n+m+2k+2\lambda)(n+m+2k+2\lambda+1)}{(2n+4k+2\lambda+2)(2n+4k+2\lambda+4)} = 0 \quad k = k_0 - 1 \quad k_0 = -M = -\left\lfloor \frac{n+m+2\lambda-1}{2} \right\rfloor = -\frac{n+m+2\lambda-1-\delta}{2}$$

$$\begin{cases} 2(k_0 - 1) = -(n+m+2\lambda+1-\delta) \\ n+m+2(k_0-1)+2\lambda = \varepsilon + \delta - 1 \\ n+m+2(k_0-1)+2\lambda+1 = \varepsilon + \delta \\ 2n+4(k_0-1)+2\lambda+2 = 4(k_0-1)+4\lambda-2\lambda+2 = 2\varepsilon - 2(m-\delta) - 2\lambda \\ 2n+4(k_0-1)+2\lambda+4 = 4(k_0-1)+4\lambda+2-2\lambda+2 = 2\varepsilon - 2(m-\delta) - 2\lambda + 2 \end{cases} \quad \text{avec } \delta = (n+m+2\lambda-1) \bmod 2$$

$$\Rightarrow C_{-M-1+\varepsilon} = -\gamma^2 \frac{(\varepsilon + \delta - 1)(\varepsilon + \delta)}{(2(m-\delta) + 2\lambda - 2\varepsilon)(2(m-\delta) + 2\lambda - 2 - 2\varepsilon)} \quad \text{de plus } (\varepsilon + \delta - 1)(\varepsilon + \delta) = -\varepsilon(-1)^\delta$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{-M-1} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{C_{-M-1+\varepsilon}}{\varepsilon} = \gamma^2 \frac{(-1)^\delta}{(2(m-\delta) + 2\lambda)(2(m-\delta) + 2\lambda - 2)} \Rightarrow \begin{cases} n+m+2\lambda-1 \text{ pair} & \tilde{C}_{-M-1} = -\frac{\gamma^2}{(2m+2\lambda)(2m+2\lambda-2)} \\ n+m+2\lambda-1 \text{ impair} & \tilde{C}_{-M-1} = -\frac{\gamma^2}{(2m+2\lambda-2)(2m+2\lambda-4)} \end{cases} \\ \Rightarrow \tilde{f}_{-M-1}^{(+)} &= \frac{\tilde{d}_{n,-M-1}^{\lambda,m}(\gamma^2)}{\tilde{d}_{n,-M}^{\lambda,m}(\gamma^2)} = -\frac{C_{-M-1}}{B_{-M-1} - \omega(\gamma^2) + A_{-M-1} \tilde{f}_{-M-2}^{(+)}} \\ &\Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d_{n,-M-1}^{\lambda,m}(\gamma^2)}{\varepsilon} \frac{1}{d_{n,-M}^{\lambda,m}(\gamma^2)} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{C_{-M-1}}{\varepsilon} \frac{1}{B_{-M-1} - \omega(\gamma^2) + A_{-M-1} \tilde{f}_{-M-2}^{(+)}} \Rightarrow \frac{\tilde{d}_{n,-M-1}^{\lambda,m}(\gamma^2)}{d_{n,-M}^{\lambda,m}(\gamma^2)} = -\frac{\tilde{C}_{-M-1}}{B_{-M-1} - \omega(\gamma^2) + A_{-M-1} \tilde{f}_{-M-2}^{(+)}} \\ \frac{d_{n,-M}^{\lambda,m}(\gamma^2)}{d_{n,0}^{\lambda,m}(\gamma^2)} &= \prod_{l=1}^{l=M} f_{-l}^{(+)} \quad \tilde{f}_k^{(+)} = -\frac{C_k}{B_k - \omega(\gamma^2) + A_k \tilde{f}_{k-1}^{(+)}} \end{aligned}$$

La normalisation des fonctions de deuxième espèce : on utilise le même type de normalisation que pour les fonctions de première espèce sur les coefficients des indices $k \in [-M, +\infty]$, soit :

$$1 = \begin{cases} \sum_{k=-\left\lfloor \frac{n+m+2\lambda-1}{2} \right\rfloor}^{+\infty} \left(d_{n,k}^{\lambda,m}(\gamma^2) \right)^2 \frac{2\lambda+2n}{2\lambda+2n+4k} \frac{\Gamma(n+m+2\lambda+2k)}{\Gamma(n+m+2\lambda)} \frac{\Gamma(n-m+1)}{\Gamma(n-m+1+2k)} \\ \Leftrightarrow \sum_{k=-\left\lfloor \frac{n+m+2\lambda-1}{2} \right\rfloor}^{+\infty} \left(d_{n,k}^{\lambda,m}(\gamma^2) \right)^2 \frac{2\lambda+2n}{2\lambda+2n+4k} \frac{(n+m+2\lambda-1+2k)!}{(n+m+2\lambda-1)!} \frac{(n-m)!}{(n-m+2k)!} \Leftrightarrow \sum_{k=-\left\lfloor \frac{n+m+2\lambda-1}{2} \right\rfloor}^{+\infty} \left(d_{n,k}^{\lambda,m}(\gamma^2) \right)^2 \frac{2\lambda+2n}{2\lambda+2n+4k} \frac{(n+m+2\lambda)_{2k}}{(n-m+1)_{2k}} \end{cases}$$

Que l'on répercute dans le développement :

$$hqs_n^{\lambda,m}(x, \gamma^2) = \sum_{k=-\infty}^{k=-M-1} (-1)^k \tilde{d}_{n,k}^{\lambda,m}(\gamma^2) C_{-n-2k-2\lambda}^{\lambda,m}(x) + \sum_{k=-M}^{+\infty} (-1)^k d_{n,k}^{\lambda,m}(\gamma^2) C_{(Q),n+2k}^{\lambda,m}(x) \quad \text{avec } M = \left\lfloor \frac{n+m+2\lambda-1}{2} \right\rfloor$$

A titre indicatif les indices du premier développement peuvent se calibrer sur un autre intervalle :

$$C_{-n-2k-2\lambda}^{\lambda,m}(x) \quad k \in \left] -\infty, \frac{-n-m-2\lambda+1+\delta-2}{2} \right] \quad \text{avec } \delta = n+m+2\lambda-1 \bmod 2 \Leftrightarrow C_{m-\delta+1+2k'}^{\lambda,m}(x) \quad k' \in]0, +\infty]$$

Construction des fonctions hyper-sphéroïdales radiales de première, deuxième, troisième et quatrième espèce

Les fonctions radiales sont en fait les solutions de la même équation différentielle hyper-sphéroïdale mais lorsque l'argument réel x est supérieur à 1 :

$$(1-x^2)y''(x) - (2\lambda+1)x y'(x) + \left(\omega + \gamma^2(1-x^2) - \frac{\mu(\mu+2\lambda-1)}{1-x^2} \right) y(x) = 0$$

On peut transformer très légèrement cette équation différentielle pour tenir compte de l'argument $x > 1$:

$$(x^2-1)\frac{d^2y(x)}{dx^2} + (2\lambda+1)x \frac{dy(x)}{dx} - \left(\omega - \gamma^2(x^2-1) + \frac{\mu(\mu+2\lambda-1)}{x^2-1} \right) y(x) = 0$$

Ensuite on transforme cette équation différentielle par le changement de variable suivant : $t = \gamma x$, puis le passage à la limite $\gamma \rightarrow 0$:

$$(t^2 - \gamma^2)\frac{d^2y(t)}{dt^2} + (2\lambda+1)t \frac{dy(t)}{dt} - \left(\omega - \gamma^2\left(\frac{t^2}{\gamma^2} - 1\right) + \frac{\mu(\mu+2\lambda-1)\gamma^2}{t^2 - \gamma^2} \right) y(t) = 0$$

$$\gamma \rightarrow 0 \Rightarrow t^2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + (2\lambda+1)t \frac{dy(t)}{dt} + (t^2 - \omega)y(t) = 0$$

Or la dernière équation correspond à l'équation des fonctions de Bessel définie à partir des fonctions de Bessel sous la forme :

$$\omega = \nu(\nu+2\lambda) \rightarrow t^2 y''(t) + (2\lambda+1)t y'(t) + (t^2 - \nu(\nu+2\lambda))y(t) = 0$$

$$y(t) = \frac{g(t)}{t^\lambda} \rightarrow t^2 g''(t) + t g'(t) + (t^2 - (\nu+\lambda)^2)g(t) = 0 \Leftrightarrow y(t) = a \frac{J_{\nu+\lambda}(t)}{t^\lambda} + b \frac{Y_{\nu+\lambda}(t)}{t^\lambda}$$

Le passage à la limite $\gamma \rightarrow 0$ des solutions radiales de l'équation hyper-sphéroïdale est donc :

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} y\left(\frac{t}{\gamma}\right) = a \frac{J_{\nu+\lambda}(t)}{t^\lambda} + b \frac{Y_{\nu+\lambda}(t)}{t^\lambda}$$

On note également que l'équation différentielle hyper-sphéroïdale est invariante par le changement : $\mu \rightarrow -\mu+1-2\lambda$. Cela signifie que les solutions de l'équation différentielle pour μ le sont également pour $-\mu+1-2\lambda$.

Ce comportement limite en $\gamma \rightarrow 0$ nous suggère d'employer les fonctions de Bessel comme une base de développement en série pour les quatre types de fonction radiales :

$$\begin{cases} x \in [1, +\infty] & HS_n^{(i)\lambda, m}(x, \gamma^2) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_{\nu, k}^{\lambda, \mu}(\gamma^2) \frac{f_{\nu+\lambda+2k}(\gamma x)}{(\gamma x)^\lambda} \quad i = 1, 2, 3, 4 \\ \text{Fonctions de Bessel} & f_{\nu+\lambda+2k}(x) \quad f = J, Y, H^{(1)}, H^{(2)} \end{cases}$$

Quand on injecte ce développement et compte tenu de l'équation différentielle des fonctions de Bessel du développement, les relations de récurrence et de dérivation on arrive à la récurrence suivante à trois termes sur les coefficients r :

$$\begin{aligned} & \tilde{A}_k r_{v,k-1}^{\lambda,\mu}(\gamma^2) + (\tilde{B}_k - \omega(\gamma^2)) r_{v,k}^{\lambda,\mu}(\gamma^2) + \tilde{C}_k r_{v,k+1}^{\lambda,\mu}(\gamma^2) = 0 \\ & \begin{cases} \tilde{A}_k = -\gamma^2 \frac{(\nu + \mu + 2k + 2\lambda - 2)(\nu + \mu + 2k + 2\lambda - 1)}{(2\nu + 4k + 2\lambda - 2)(2\nu + 4k + 2\lambda - 4)} \\ \tilde{B}_k = (\nu + 2k)(\nu + 2k + 2\lambda) - 2\gamma^2 \frac{(\nu + 2k)(\nu + 2k + 2\lambda) + \mu^2 - 1 + (\mu + \lambda)(2\lambda - 1)}{(2\nu + 4k + 2\lambda - 2)(2\nu + 4k + 2\lambda + 2)} \\ \tilde{C}_k = -\gamma^2 \frac{(\nu - \mu + 2k + 1)(\nu - \mu + 2k + 2)}{(2\nu + 4k + 2\lambda + 2)(2\nu + 4k + 2\lambda + 4)} \end{cases} \end{aligned}$$

On constate donc que c'est en fait une récurrence similaire à la récurrence obtenue pour les fonctions angulaires avec les changements suivant μ en $-\mu+1-2\lambda$:

$$\begin{aligned} & A_k d_{v,k-1}^{\lambda,\mu}(\gamma^2) + (B_k - \omega(\gamma^2)) d_{v,k}^{\lambda,\mu}(\gamma^2) + C_k d_{v,k+1}^{\lambda,\mu}(\gamma^2) = 0 \quad k \in \{-\infty, \dots, 0, 1, \dots, +\infty\} \\ & \begin{cases} A_k = -\gamma^2 \frac{(\nu - \mu + 2k - 1)(\nu - \mu + 2k)}{(2\nu + 4k + 2\lambda - 2)(2\nu + 4k + 2\lambda - 4)} \\ B_k = (\nu + 2k)(\nu + 2k + 2\lambda) - 2\gamma^2 \frac{(\nu + 2k)(\nu + 2k + 2\lambda) + \mu^2 - 1 + (2\lambda - 1)(\mu + \lambda)}{(2\nu + 4k + 2\lambda - 2)(2\nu + 4k + 2\lambda + 2)} \\ C_k = -\gamma^2 \frac{(\nu + \mu + 2k + 2\lambda)(\nu + \mu + 2k + 2\lambda + 1)}{(2\nu + 4k + 2\lambda + 2)(2\nu + 4k + 2\lambda + 4)} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi les coefficients de la série radiale sont liés aux coefficients de la série angulaire par la relation : $r_{v,k}^{\lambda,\mu}(\gamma^2) = d_{v,k}^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2)$.

La série radiale conduit-elle à des valeurs caractéristiques λ identique car :

- les valeurs caractéristiques ne changent pas avec le changement μ en $-\mu+1-2\lambda$
- la valeur caractéristique ω est solution d'une équation transcendante construite à partir des fractions continues définies sur les trois coefficients A_k, B_k, C_k équivalente à la fraction continue construite par transformation des coefficients $\tilde{d}_{v,k}^{\lambda,\mu}(\gamma^2) = f(k) d_{v,k}^{\lambda,\mu}(\gamma^2)$ de la forme $\frac{f(k)}{f(k-1)} A_k, B_k, C_k \frac{f(k)}{f(k+1)}$ et pour laquelle les rapports sont constants : $\frac{f(k)}{f(k-1)} = \frac{f(k)}{f(k+1)} = C_{ste}$.

On peut donc à ce stade écrire :

$$\begin{cases} x \in [1, +\infty] & HS_v^{(i)\lambda,\mu}(x, \gamma^2) = C_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_{v,k}^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2) \frac{f_{v+\lambda+2k}(\gamma x)}{(\gamma x)^\lambda} \quad i=1,2,3,4 \\ \text{Fonctions de Bessel} & f_{v+\lambda+2k}(x) \quad f = J, Y, H^{(1)}, H^{(2)} \end{cases}$$

Par la suite je vais me restreindre pour l'instant au cas où les paramètres v et μ sont des entiers et dans ce cas j'écrirais ici $n=v$ et $m=\mu$ pour désigner des valeurs entières.

La normalisation des fonctions sphéroïdales radiales est liée à leur comportement en lorsque $\gamma x \rightarrow \infty$. Les fonctions hyper-sphéroïdales radiales suivent le comportement asymptotique des fonctions de Bessel correspondantes, à savoir :

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma x \rightarrow \infty} HS_n^{(1)\lambda,m}(x, \gamma^2) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \lim_{\gamma x \rightarrow \infty} \frac{J_{n+\lambda}(\gamma x)}{(\gamma x)^\lambda} \approx (\gamma x)^{-\lambda-\frac{1}{2}} \sin\left(\gamma x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi(2\lambda-1)}{4}\right) \\ \lim_{\gamma x \rightarrow \infty} HS_n^{(2)\lambda,m}(x, \gamma^2) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \lim_{\gamma x \rightarrow \infty} \frac{Y_{n+\lambda}(\gamma x)}{(\gamma x)^\lambda} \approx -(\gamma x)^{-\lambda-\frac{1}{2}} \cos\left(\gamma x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi(2\lambda-1)}{4}\right) \end{aligned}$$

En injectant cette normalisation dans le développement, il vient :

$$\begin{aligned} \text{Sachant que } \lim_{\gamma x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{m}{2}} &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\gamma^2}{u^2}\right)^{\frac{m}{2}} = 1 \\ \lim_{\gamma x \rightarrow \infty} HS_n^{(1)\lambda,m}(x, \gamma^2) &= C_0 \lim_{\gamma x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{m}{2}} (\gamma x)^{-\lambda-\frac{1}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_{n,k}^{\lambda,-m+1-2\lambda}(\gamma^2) \sin\left(\gamma x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi(2\lambda-1)}{4} - k\pi\right) \\ \lim_{\gamma x \rightarrow \infty} HS_n^{(2)\lambda,m}(x, \gamma^2) &= -C_0 \lim_{\gamma x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{m}{2}} (\gamma x)^{-\lambda-\frac{1}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_{n,k}^{\lambda,-m+1-2\lambda}(\gamma^2) \cos\left(\gamma x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi(2\lambda-1)}{4} - k\pi\right) \\ \Rightarrow \begin{cases} \gamma x \rightarrow \infty & HS_n^{(1)\lambda,m}(x, \gamma^2) \approx C_0 (\gamma x)^{-\lambda-\frac{1}{2}} \sin\left(\gamma x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi(2\lambda-1)}{4}\right) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k d_{n,k}^{\lambda,-m+1-2\lambda}(\gamma^2) \\ \gamma x \rightarrow \infty & HS_n^{(2)\lambda,m}(x, \gamma^2) \approx -C_0 (\gamma x)^{-\lambda-\frac{1}{2}} \cos\left(\gamma x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi(2\lambda-1)}{4}\right) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k d_{n,k}^{\lambda,-m+1-2\lambda}(\gamma^2) \end{cases} \\ \Rightarrow C_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k d_{n,k}^{\lambda,-m+1-2\lambda}(\gamma^2) &= 1 \Leftrightarrow C_0 = \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k d_{n,k}^{\lambda,-m+1-2\lambda}(\gamma^2) \right\}^{-1} \end{aligned}$$

Soit les fonctions normalisées suivantes :

$$\begin{cases} x \in [1, +\infty] & HS_n^{(i)\lambda,m}(x, \gamma^2) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{m}{2}}}{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k d_{n,k}^{\lambda,-m+1-2\lambda}(\gamma^2)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_{n,k}^{\lambda,-m+1-2\lambda}(\gamma^2) \frac{f_{n+\lambda+2k}(\gamma x)}{(\gamma x)^\lambda} \quad i = 1, 2, 3, 4 \\ \text{Fonctions de Bessel} & f_{n+\lambda+2k}(x) \quad f = J, Y, H^{(1)}, H^{(2)} \end{cases}$$

Dans le cas de degré et d'ordre entiers n et m tel que $n \geq m$ et λ demi-entier, la série n'est pas infinie dans les deux directions, elle s'arrête les indices k négatif lorsque $k < k_0$ et comme la série est construite en changeant m en $-m+1-2\lambda$. $k_0(m)$ est égal à la valeur suivante :

$k_0(m) = -\left\lfloor \frac{n+m+2\lambda-1}{2} \right\rfloor$. Donc la limite devient : $k_0(-m+1-2\lambda) = -\left\lfloor \frac{n-m}{2} \right\rfloor$. Donc la série commence à l'indice $k \geq -\left\lfloor \frac{n-m}{2} \right\rfloor = -\frac{n-m-\delta}{2}$ avec $\delta = (n-m) \bmod 2$.

On peut donc écrire la série sous toutes ces formes équivalentes lorsque $n \geq m$ et λ demi-entier, compte tenu de la normalisation :

$$HS_n^{(i)\lambda,m}(x, \gamma^2) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{m}{2}}}{\sum_{k=\left[\frac{n-m}{2}\right]}^{+\infty} (-1)^k d_{n,k}^{\lambda,-m+1-2\lambda}(\gamma^2)} \sum_{k=\left[\frac{n-m}{2}\right]}^{+\infty} d_{n,k}^{\lambda,-m+1-2\lambda}(\gamma^2) \frac{f_{n+\lambda+2k}(\gamma x)}{(\gamma x)^\lambda} \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{m}{2}}}{\sum_{k=\frac{n-m-\delta}{2}}^{+\infty} (-1)^k d_{n,k}^{\lambda,-m+1-2\lambda}(\gamma^2)} \sum_{k=\frac{n-m-\delta}{2}}^{+\infty} d_{n,k}^{\lambda,-m+1-2\lambda}(\gamma^2) \frac{f_{n+\lambda+2k}(\gamma x)}{(\gamma x)^\lambda} \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{m}{2}}}{\sum_{2k=m-n+\delta}^{+\infty} (-1)^k d_{n,k}^{\lambda,-m+1-2\lambda}(\gamma^2)} \sum_{2k=m-n+\delta}^{+\infty} d_{n,k}^{\lambda,-m+1-2\lambda}(\gamma^2) \frac{f_{n+\lambda+2k}(\gamma x)}{(\gamma x)^\lambda} \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{m}{2}}}{\sum_{2k \geq m-n}^{+\infty} (-1)^k d_{n,k}^{\lambda,-m+1-2\lambda}(\gamma^2)} \sum_{2k \geq m-n}^{+\infty} d_{n,k}^{\lambda,-m+1-2\lambda}(\gamma^2) \frac{f_{n+\lambda+2k}(\gamma x)}{(\gamma x)^\lambda} \end{cases}$$

$i = 1, 2, 3, 4$ Fonctions de Bessel $f_{n+\lambda+2k}(x)$ $f = J, Y, H^{(1)}, H^{(2)}$

La limite lorsque le paramètre γ s'annule est la suivante :

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \rightarrow 0} HS_n^{(1)\lambda,m}\left(\frac{x}{\gamma}, \gamma^2\right) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{J_{n+\lambda}(x)}{x^\lambda} & \lim_{\gamma \rightarrow 0} HS_n^{(2)\lambda,m}\left(\frac{x}{\gamma}, \gamma^2\right) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{Y_{n+\lambda}(x)}{x^\lambda} \\ \lim_{\gamma \rightarrow 0} HS_n^{(3)\lambda,m}\left(\frac{x}{\gamma}, \gamma^2\right) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{H_{n+\lambda}^{(1)}(x)}{x^\lambda} & \lim_{\gamma \rightarrow 0} HS_n^{(3)\lambda,m}\left(\frac{x}{\gamma}, \gamma^2\right) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{H_{n+\lambda}^{(2)}(x)}{x^\lambda} \end{aligned}$$

De l'équation différentielle hyper-sphéroïdale, on sait que le Wronskien de deux solutions indépendantes est obligatoirement proportionnelle à :

$$\text{Wronskien} \{HS_n^{(1)\lambda,m}(x, \gamma^2), HS_n^{(2)\lambda,m}(x, \gamma^2)\} \propto \frac{1}{(x^2 - 1)^{\frac{2\lambda+1}{2}}}$$

Etant donné la condition de normalisation à l'infini, il vient immédiatement :

$$\text{Wronskien} \{HS_n^{(1)\lambda,m}(x, \gamma^2), HS_n^{(2)\lambda,m}(x, \gamma^2)\} = \frac{1}{\gamma^{2\lambda} (x^2 - 1)^{\frac{2\lambda+1}{2}}}$$

Fonctions hyper-sphéroïdales angulaires de première et deuxième espèce pour $x > 1$

Les fonctions de Gegenbauer associées de type 1 et 2 sont définies par les formules suivantes pour les deux domaines respectifs de valeurs des paramètres :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda, \nu \in \mathbf{R} \\ \mu \in \mathbf{N} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_{1,\nu}^{\lambda,\mu}(z) = (-1)^\mu \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} \frac{\Gamma(\nu + \mu + 2\lambda)}{\Gamma(\nu - \mu + 1)} (1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{\frac{1}{2}, \lambda + \nu - \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2} - \lambda - \mu}(z) \quad C_{2,\nu}^{\lambda,\mu}(z) = \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} \frac{\Gamma(\nu + \mu + 2\lambda)}{\Gamma(\nu - \mu + 1)} (z^2 - 1)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{\frac{1}{2}, \lambda + \nu - \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2} - \lambda - \mu}(z) \\ C_{1,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z) = (-1)^\mu \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} \frac{\Gamma(\nu + \mu + 2\lambda)}{\Gamma(\nu - \mu + 1)} (1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} Q_{\frac{1}{2}, \lambda + \nu - \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2} - \lambda - \mu}(z) \quad C_{2,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z) = e^{2i\pi(\lambda - \frac{1}{2} + \mu)} \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} \frac{\Gamma(\nu + \mu + 2\lambda)}{\Gamma(\nu - \mu + 1)} (z^2 - 1)^{\frac{1-2\lambda}{4}} Q_{\frac{1}{2}, \lambda + \nu - \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2} - \lambda - \mu}(z) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu, \mu \in \mathbf{R} \\ \lambda = \frac{2p+1}{2} \\ p \in \mathbf{N} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_{1,\nu}^{\lambda,\mu}(z) = (-1)^{\frac{1-2\lambda}{2}} \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} (1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{\frac{1}{2}, \lambda + \nu - \frac{1}{2}}^{\lambda - \frac{1}{2} + \mu}(z) \quad C_{2,\nu}^{\lambda,\mu}(z) = \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} (z^2 - 1)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{\frac{1}{2}, \lambda + \nu - \frac{1}{2}}^{\lambda - \frac{1}{2} + \mu}(z) \\ C_{1,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z) = (-1)^{\frac{1-2\lambda}{2}} \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} (1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} Q_{\frac{1}{2}, \lambda + \nu - \frac{1}{2}}^{\lambda - \frac{1}{2} + \mu}(z) \quad C_{2,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z) = \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} (z^2 - 1)^{\frac{1-2\lambda}{4}} Q_{\frac{1}{2}, \lambda + \nu - \frac{1}{2}}^{\lambda - \frac{1}{2} + \mu}(z) \end{array} \right.$$

Les fonctions de Gegenbauer associées de type 1 et 2 sont connectées par les formules suivantes pour les deux domaines respectifs de valeurs des paramètres :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda, \nu \in \mathbf{R} \quad \mu \in \mathbf{N} \rightarrow C_{2,\nu}^{\lambda,\mu}(z) = (-1)^\mu \frac{(z-1)^{\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}} C_{1,\nu}^{\lambda,\mu}(z) \\ \left\{ \begin{array}{l} \lambda, \nu \in \mathbf{R} \quad \mu \in \mathbf{N} \\ \frac{1}{2} - \lambda - \mu \notin \mathbf{N} \end{array} \right. \rightarrow C_{2,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z) = e^{-i\left(\frac{1-2\lambda}{2}\right)\pi} \frac{(z-1)^{\frac{1-2\lambda}{2} - \frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{1-2\lambda}{2} - \frac{\mu}{2}}} \left(C_{1,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z) + \frac{\pi}{2\cos((\lambda + \mu)\pi)} \left(\frac{(1-z)^{\frac{1-2\lambda}{2} - \mu}}{(z-1)^{\frac{1-2\lambda}{2} - \mu}} - \sin((\lambda + \mu)\pi) \right) C_{1,\nu}^{\lambda,\mu}(z) \right) \\ \lambda, \nu \in \mathbf{R} \quad \mu \in \mathbf{N} \quad \frac{1}{2} - \lambda - \mu \in \mathbf{N} \rightarrow C_{2,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z) = (-1)^{\frac{1-2\lambda}{2}} \frac{(z-1)^{\frac{1-2\lambda}{2} - \frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{1-2\lambda}{2} - \frac{\mu}{2}}} \left(C_{1,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z) + \frac{\pi \sqrt{1-z}}{2\sqrt{z-1}} C_{1,\nu}^{\lambda,\mu}(z) \right) \end{array} \right.$$

$$\nu, \mu \in \mathbf{R} \quad \lambda = \frac{2p+1}{2} \quad p \in \mathbf{N} \rightarrow C_{2,\nu}^{\lambda,\mu}(z) = (-1)^{\frac{1-2\lambda}{2}} \frac{(1-z)^{\frac{2\lambda-1}{2} + \frac{\mu}{2}}}{(z-1)^{\frac{2\lambda-1}{2} + \frac{\mu}{2}}} C_{1,\nu}^{\lambda,\mu}(z)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu, \mu \in \mathbf{R} \\ \lambda = \frac{2p+1}{2} \\ p \in \mathbf{N} \quad \mu + \lambda - \frac{1}{2} \notin \mathbf{N} \end{array} \right. \rightarrow C_{2,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z) = e^{i\mu\pi} \frac{(z-1)^{\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}} \left(C_{1,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z) - \frac{\pi}{2\cos((\lambda + \mu)\pi)} \left(\frac{(1-z)^{\frac{2\lambda-1}{2} + \mu}}{(z-1)^{\frac{2\lambda-1}{2} + \mu}} - \sin((\lambda + \mu)\pi) \right) C_{1,\nu}^{\lambda,\mu}(z) \right)$$

$$\nu, \mu \in \mathbf{R} \quad \lambda = \frac{2p+1}{2} \quad p \in \mathbf{N} \quad \mu + \lambda - \frac{1}{2} \in \mathbf{N} \rightarrow C_{2,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z) = e^{i\mu\pi} \frac{(z-1)^{\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}} \left(C_{1,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z) + \frac{\pi \sqrt{1-z}}{2\sqrt{z-1}} C_{1,\nu}^{\lambda,\mu}(z) \right)$$

Formellement les deux fonctions hyper-sphéroïdales de première et deuxième espèce peuvent se construire à l'aide des développements suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in [-1,1] \\ x > 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} hps_{1,v}^{\lambda,\mu}(x, \gamma^2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k d_{n,k}^{\lambda,\mu}(\gamma^2) C_{1,v+2k}^{\lambda,\mu}(x) \\ hqs_{1,v}^{\lambda,\mu}(x, \gamma^2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k d_{n,k}^{\lambda,\mu}(\gamma^2) C_{1,(Q),v+2k}^{\lambda,\mu}(x) \\ hps_{2,v}^{\lambda,\mu}(x, \gamma^2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k d_{n,k}^{\lambda,\mu}(\gamma^2) C_{2,v+2k}^{\lambda,\mu}(x) \\ hqs_{2,v}^{\lambda,\mu}(x, \gamma^2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k d_{n,k}^{\lambda,\mu}(\gamma^2) C_{2,(Q),v+2k}^{\lambda,\mu}(x) \end{array} \right.$$

Avec ces définitions, seules les fonctions de première espèce ont une formule de connexion similaires avec celles des fonctions associées de Legendre dont elles sont construites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda, v \in \mathbf{R} \quad \mu \in \mathbf{N} \rightarrow hps_{2,v}^{\lambda,\mu}(z) = (-1)^\mu \frac{(z-1)^{\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}} hps_{1,v}^{\lambda,\mu}(z, \gamma^2) = \frac{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}{(z-1)^{\frac{\mu}{2}}} hps_{1,v}^{\lambda,\mu}(z, \gamma^2) \\ \left\{ \begin{array}{l} \lambda, v \in \mathbf{R} \quad \mu \in \mathbf{N} \\ \frac{1}{2} - \lambda - \mu \notin \mathbf{N} \end{array} \right. \rightarrow hqs_{2,v}^{\lambda,\mu}(z, \gamma^2) = e^{-i\left(\frac{1-2\lambda}{2}\right)\pi} \frac{(z-1)^{\frac{1-2\lambda}{2} - \frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{1-2\lambda}{2} - \frac{\mu}{2}}} \left(hqs_{1,v}^{\lambda,\mu}(z, \gamma^2) + \frac{\pi}{2\cos((\lambda + \mu)\pi)} \left(\frac{(1-z)^{\frac{1-2\lambda}{2} - \mu}}{(z-1)^{\frac{1-2\lambda}{2} - \mu}} - \sin((\lambda + \mu)\pi) \right) hps_{1,v}^{\lambda,\mu}(z, \gamma^2) \right) \\ \lambda, v \in \mathbf{R} \quad \mu \in \mathbf{N} \quad \frac{1}{2} - \lambda - \mu \in \mathbf{N} \rightarrow hqs_{2,v}^{\lambda,\mu}(z, \gamma^2) = (-1)^{\frac{1-2\lambda}{2}} \frac{(z-1)^{\frac{1-2\lambda}{2} - \frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{1-2\lambda}{2} - \frac{\mu}{2}}} \left(hqs_{1,v}^{\lambda,\mu}(z, \gamma^2) + \frac{\pi \sqrt{1-z}}{2\sqrt{z-1}} hps_{1,v}^{\lambda,\mu}(z, \gamma^2) \right) \\ \left\{ \begin{array}{l} v, \mu \in \mathbf{R} \quad \lambda = \frac{2p+1}{2} \quad p \in \mathbf{N} \rightarrow hps_{2,v}^{\lambda,\mu}(z, \gamma^2) = (-1)^{\frac{1-2\lambda}{2}} \frac{(1-z)^{\frac{2\lambda-1}{2} + \frac{\mu}{2}}}{(z-1)^{\frac{2\lambda-1}{2} + \frac{\mu}{2}}} hps_{1,v}^{\lambda,\mu}(z, \gamma^2) \\ \left\{ \begin{array}{l} v, \mu \in \mathbf{R} \\ \lambda = \frac{2p+1}{2} \end{array} \right. \rightarrow hqs_{2,v}^{\lambda,\mu}(z, \gamma^2) = e^{i\mu\pi} \frac{(z-1)^{\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}} \left(hqs_{1,v}^{\lambda,\mu}(z, \gamma^2) - \frac{\pi}{2\cos((\lambda + \mu)\pi)} \left(\frac{(1-z)^{\frac{2\lambda-1}{2} + \mu}}{(z-1)^{\frac{2\lambda-1}{2} + \mu}} - \sin((\lambda + \mu)\pi) \right) hps_{1,v}^{\lambda,\mu}(z, \gamma^2) \right) \\ p \in \mathbf{N} \quad \mu + \lambda - \frac{1}{2} \notin \mathbf{N} \\ v, \mu \in \mathbf{R} \quad \lambda = \frac{2p+1}{2} \quad p \in \mathbf{N} \quad \mu + \lambda - \frac{1}{2} \in \mathbf{N} \rightarrow hqs_{2,v}^{\lambda,\mu}(z, \gamma^2) = e^{i\mu\pi} \frac{(z-1)^{\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}} \left(hqs_{1,v}^{\lambda,\mu}(z, \gamma^2) + \frac{\pi \sqrt{1-z}}{2\sqrt{z-1}} hps_{1,v}^{\lambda,\mu}(z, \gamma^2) \right) \end{array} \right.$$

Avec les notations hps , hqs pour les fonctions de type 1 et HPS et HQS pour celles de type 2, cela donne :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \lambda, \nu \in \mathbf{R} \quad \mu \in \mathbf{N} \rightarrow HPS_{\nu}^{\lambda, \mu}(z, \gamma^2) = \frac{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}{(z-1)^{\frac{\mu}{2}}} hps_{\nu}^{\lambda, \mu}(z, \gamma^2) \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 \lambda, \nu \in \mathbf{R} \quad \mu \in \mathbf{N} \\
 \frac{1}{2} - \lambda - \mu \notin \mathbf{N}
 \end{array} \right. \rightarrow HQS_{\nu}^{\lambda, \mu}(z, \gamma^2) = e^{-i\left(\frac{1-2\lambda}{2}\right)\pi} \frac{(z-1)^{\frac{1-2\lambda}{2} - \frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{1-2\lambda}{2} - \frac{\mu}{2}}} \left(hqs_{\nu}^{\lambda, \mu}(z, \gamma^2) + \frac{\pi}{2\cos((\lambda + \mu)\pi)} \left(\frac{(1-z)^{\frac{1-2\lambda}{2} - \mu}}{(z-1)^{\frac{1-2\lambda}{2} - \mu}} - \sin((\lambda + \mu)\pi) \right) hps_{\nu}^{\lambda, \mu}(z, \gamma^2) \right) \\
 \lambda, \nu \in \mathbf{R} \quad \mu \in \mathbf{N} \quad \frac{1}{2} - \lambda - \mu \in \mathbf{N} \rightarrow HQS_{\nu}^{\lambda, \mu}(z, \gamma^2) = (-1)^{\frac{1-2\lambda}{2}} \frac{(z-1)^{\frac{1-2\lambda}{2} - \frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{1-2\lambda}{2} - \frac{\mu}{2}}} \left(hqs_{\nu}^{\lambda, \mu}(z, \gamma^2) + \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{z-1}} hps_{\nu}^{\lambda, \mu}(z, \gamma^2) \right) \\
 \nu, \mu \in \mathbf{R} \quad \lambda = \frac{2p+1}{2} \quad p \in \mathbf{N} \rightarrow HPS_{\nu}^{\lambda, \mu}(z, \gamma^2) = (-1)^{\frac{1-2\lambda}{2}} \frac{(1-z)^{\frac{2\lambda-1}{2} + \frac{\mu}{2}}}{(z-1)^{\frac{2\lambda-1}{2} + \frac{\mu}{2}}} hps_{\nu}^{\lambda, \mu}(z, \gamma^2) \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 \nu, \mu \in \mathbf{R} \\
 \lambda = \frac{2p+1}{2} \\
 p \in \mathbf{N} \quad \mu + \lambda - \frac{1}{2} \notin \mathbf{N}
 \end{array} \right. \rightarrow HQS_{\nu}^{\lambda, \mu}(z, \gamma^2) = e^{i\mu\pi} \frac{(z-1)^{\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}} \left(hqs_{\nu}^{\lambda, \mu}(z, \gamma^2) - \frac{\pi}{2\cos((\lambda + \mu)\pi)} \left(\frac{(1-z)^{\frac{2\lambda-1}{2} + \mu}}{(z-1)^{\frac{2\lambda-1}{2} + \mu}} - \sin((\lambda + \mu)\pi) \right) hps_{\nu}^{\lambda, \mu}(z, \gamma^2) \right) \\
 \nu, \mu \in \mathbf{R} \quad \lambda = \frac{2p+1}{2} \quad p \in \mathbf{N} \quad \mu + \lambda - \frac{1}{2} \in \mathbf{N} \rightarrow HQS_{\nu}^{\lambda, \mu}(z, \gamma^2) = e^{i\mu\pi} \frac{(z-1)^{\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}} \left(hqs_{\nu}^{\lambda, \mu}(z, \gamma^2) + \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{z-1}} hps_{\nu}^{\lambda, \mu}(z, \gamma^2) \right)
 \end{array} \right.$$

Transformation des paramètres $\mu \rightarrow -\mu+1-2\lambda$, $\nu \rightarrow -\nu-2\lambda$, formules de connexion $z \rightarrow -z$ pour les fonctions hyper-sphéroïdales angulaires de première et deuxième espèce et les fonctions radiales

Transformation $\nu \rightarrow -\nu-2\lambda$

Il a été établi pour les fonctions de Gegenbauer associées de type 1 les formules de transformation suivantes :

$$\nu, \lambda \in \mathbf{R} \quad m \in \mathbf{N} \quad \text{ou} \quad \nu, \mu \in \mathbf{R} \quad \lambda = \frac{2p+1}{2} \quad p \in \mathbf{N}$$

$$\begin{cases} C_{-\nu-2\lambda}^{\lambda, m}(z) = -\frac{\sin(\pi(\nu+2\lambda))}{\sin(\pi\nu)} C_{\nu}^{\lambda, m}(z) \\ C_{(\varrho), -\nu-2\lambda}^{\lambda, \mu}(z) = \frac{\pi \sin((\mu+\lambda)\pi) \sin((\nu+\lambda)\pi) C_{\nu}^{\lambda, \mu}(z) - \sin((\mu+\nu)\pi) C_{(\varrho), \nu}^{\lambda, \mu}(z)}{\sin((\mu-\nu)\pi)} \end{cases}$$

Étant donné la construction par des fonctions hyper-sphéroïdales par le développement formel en fonctions de Gegenbauer associées :

$$z \in [-1, 1] \quad \begin{cases} hps_{\nu}^{\lambda, \mu}(z, \gamma^2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k d_{\nu, k}^{\lambda, \mu}(\gamma^2) C_{\nu+2k}^{\lambda, \mu}(z) \\ hqs_{\nu}^{\lambda, \mu}(z, \gamma^2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k d_{\nu, k}^{\lambda, \mu}(\gamma^2) C_{(\varrho), \nu+2k}^{\lambda, \mu}(z) \end{cases}$$

Il vient immédiatement les formules suivantes pour les fonctions hyper-sphéroïdales de type 1 :

$$\nu, \lambda \in \mathbf{R} \quad m \in \mathbf{N} \quad \text{ou} \quad \nu, \mu \in \mathbf{R} \quad \lambda = \frac{2p+1}{2} \quad p \in \mathbf{N}$$

$$\begin{cases} hps_{-\nu-2\lambda}^{\lambda, m}(z, \gamma^2) = -\frac{\sin(\pi(\nu+2\lambda))}{\sin(\pi\nu)} hps_{\nu}^{\lambda, m}(z, \gamma^2) \\ hqs_{-\nu-2\lambda}^{\lambda, \mu}(z, \gamma^2) = \frac{\pi \sin((\mu+\lambda)\pi) \sin((\nu+\lambda)\pi) hps_{\nu}^{\lambda, m}(z, \gamma^2) - \sin((\mu+\nu)\pi) hqs_{\nu}^{\lambda, \mu}(z, \gamma^2)}{\sin((\mu-\nu)\pi)} \end{cases}$$

La transformation $\nu \rightarrow -\nu-2\lambda$ retranscrite dans les coefficients du développement donne :

$$d_{-\nu-2\lambda, k}^{\lambda, \mu}(\gamma^2) = d_{\nu, -k}^{\lambda, \mu}(\gamma^2)$$

Pour les fonctions de Gegenbauer associées de type 2, nous avons :

$$\nu, \lambda \in \mathbf{R} \quad m \in \mathbf{N} \quad \text{ou} \quad \nu, \mu \in \mathbf{R} \quad \lambda = \frac{2p+1}{2} \quad p \in \mathbf{N}$$

$$\begin{cases} C_{2, \nu}^{\lambda, \mu}(z) = -\frac{\sin(\pi(\nu+2\lambda))}{\sin(\pi\nu)} C_{2, \nu}^{\lambda, \mu}(z) \\ C_{2, (\varrho), -\nu-2\lambda}^{\lambda, \mu}(z) = \frac{\pi e^{i\left(\lambda+\mu-\frac{1}{2}\right)\pi} \sin((\lambda+\nu)\pi) C_{2, \nu}^{\lambda, \mu}(z) - \sin(\pi(\mu+\nu)) C_{2, (\varrho), \nu}^{\lambda, \mu}(z)}{\sin(\pi(\mu-\nu))} \end{cases}$$

Il vient immédiatement les formules suivantes pour les fonctions hyper-sphéroïdales de type 2 :

$$\nu, \lambda \in \mathbf{R} \quad m \in \mathbf{N} \quad \text{ou} \quad \nu, \mu \in \mathbf{R} \quad \lambda = \frac{2p+1}{2} \quad p \in \mathbf{N}$$

$$\begin{cases} HPS_{-\nu-2\lambda}^{\lambda, m}(z, \gamma^2) = -\frac{\sin(\pi(\nu+2\lambda))}{\sin(\pi\nu)} HPS_{\nu}^{\lambda, m}(z, \gamma^2) \\ HQS_{-\nu-2\lambda}^{\lambda, \mu}(z, \gamma^2) = \frac{\pi e^{i\left(\lambda+\mu-\frac{1}{2}\right)\pi} \sin((\lambda+\nu)\pi) HPS_{\nu}^{\lambda, m}(z, \gamma^2) - \sin(\pi(\mu+\nu)) HQS_{\nu}^{\lambda, \mu}(z, \gamma^2)}{\sin(\pi(\mu-\nu))} \end{cases}$$

Pour ce qui est des fonctions hyper-sphéroïdales radiales, d'après leur construction :

$$\begin{cases} x \in [1, +\infty] & HS_{\nu}^{(i)\lambda, \mu}(x, \gamma^2) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{\mu}{2}}}{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k d_{\nu, k}^{\lambda, -\mu+1-2\lambda}(\gamma^2)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_{\nu, k}^{\lambda, -\mu+1-2\lambda}(\gamma^2) \frac{f_{\nu+\lambda+2k}(\gamma x)}{(\gamma x)^{\lambda}} \quad i = 1, 2, 3, 4 \\ \text{Fonctions de Bessel} & f_{\nu+\lambda+2k}(x) \quad f = J, Y, H^{(1)}, H^{(2)} \end{cases}$$

Prenons l'une quelconque des fonctions de Bessel d'ordre $\nu+\lambda$, cette fonction est solution de l'équation différentielle :

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2}(f_{\nu+\lambda}(x)) + x \frac{d}{dx}(f_{\nu+\lambda}(x)) + (x^2 - (\nu+\lambda)^2) f_{\nu+\lambda}(x) = 0$$

$$\Rightarrow f_{-\nu-2\lambda+2}(x) \quad / \quad x^2 \frac{d^2}{dx^2}(f_{-\nu-\lambda}(x)) + x \frac{d}{dx}(f_{-\nu-\lambda}(x)) + (x^2 - (\nu+\lambda)^2) f_{-\nu-\lambda}(x) = 0$$

Donc la transformation $\nu \rightarrow -\nu-2\lambda$ laisse invariante l'équation différentielle et conduit à des fonctions solutions qui sont combinaisons linéaires des fonctions de Bessel initiales.

Comme $Y_{-\nu}(x) = \sin(\pi\nu)J_{\nu}(x) + \cos(\pi\nu)Y_{\nu}(x) \Rightarrow J_{-\nu}(x) = \cos(\pi\nu)J_{\nu}(x) - \sin(\pi\nu)Y_{\nu}(x)$, il vient :

$$\begin{cases} J_{-\nu-\lambda}(x) = \cos(\pi(\nu+\lambda))J_{\nu+\lambda}(x) - \sin(\pi(\nu+\lambda))Y_{\nu+\lambda}(x) \\ Y_{-\nu-\lambda}(x) = \sin(\pi(\nu+\lambda))J_{\nu+\lambda}(x) + \cos(\pi(\nu+\lambda))Y_{\nu+\lambda}(x) \end{cases}$$

Ces relations sont invariantes par translation d'un indice $2k$. De plus la relation sur les coefficients du développement $d_{-\nu-2\lambda, k}^{\lambda, \mu}(\gamma^2) = d_{\nu, -k}^{\lambda, \mu}(\gamma^2)$ ne fait que changer l'ordre de la sommation, il vient donc :

$$\begin{cases} HS_{-\nu-2\lambda}^{(1)\lambda, \mu}(x, \gamma^2) = \cos(\pi(\nu+\lambda))HS_{\nu}^{(1)\lambda, \mu}(x, \gamma^2) - \sin(\pi(\nu+\lambda))HS_{\nu}^{(2)\lambda, \mu}(x, \gamma^2) \\ HS_{-\nu-2\lambda}^{(2)\lambda, \mu}(x, \gamma^2) = \sin(\pi(\nu+\lambda))HS_{\nu}^{(1)\lambda, \mu}(x, \gamma^2) + \cos(\pi(\nu+\lambda))HS_{\nu}^{(2)\lambda, \mu}(x, \gamma^2) \\ HS_{-\nu-2\lambda}^{(3)\lambda, \mu}(x, \gamma^2) = e^{i(\nu+\lambda)\pi} HS_{\nu}^{(3)\lambda, \mu}(x, \gamma^2) \\ HS_{-\nu-2\lambda}^{(4)\lambda, \mu}(x, \gamma^2) = e^{-i(\nu+\lambda)\pi} HS_{\nu}^{(4)\lambda, \mu}(x, \gamma^2) \end{cases}$$

Transformation $\mu \rightarrow -\mu+1-2\lambda$

Si l'on se restreint aux valeurs demi-entières de λ , on sait que cette transformation sur les fonctions de Gegenbauer associées donne les formules suivantes pour μ et ν quelconques :

$$\begin{cases} C_{\nu}^{\lambda, -\mu}(z) = \frac{\Gamma(2\lambda + \nu - \mu)}{\Gamma(\nu + \mu + 1)} \left(\sin((\lambda - \mu)\pi) C_{\nu}^{\lambda, \mu - (2\lambda - 1)}(z) - \frac{2}{\pi} \cos((\lambda - \mu)\pi) C_{(\varrho), \nu}^{\lambda, \mu - (2\lambda - 1)}(z) \right) \\ C_{(\varrho), \nu}^{\lambda, -\mu}(z) = \frac{\Gamma(2\lambda + \nu - \mu)}{\Gamma(\nu + \mu + 1)} \left(\sin((\lambda - \mu)\pi) C_{(\varrho), \nu}^{\lambda, \mu - (2\lambda - 1)}(z) + \frac{\pi}{2} \cos((\lambda - \mu)\pi) C_{\nu}^{\lambda, \mu - (2\lambda - 1)}(z) \right) \\ C_{\nu}^{\lambda, -\mu+1-2\lambda}(z) = \frac{\Gamma(\nu - \mu + 1)}{\Gamma(\nu + \mu + 2\lambda)} \left(\sin((\lambda + \mu)\pi) C_{\nu}^{\lambda, \mu}(z) + \frac{2}{\pi} \cos((\lambda + \mu)\pi) C_{(\varrho), \nu}^{\lambda, \mu}(z) \right) \\ C_{(\varrho), \nu}^{\lambda, -\mu+1-2\lambda}(z) = \frac{\Gamma(\nu - \mu + 1)}{\Gamma(\nu + \mu + 2\lambda)} \left(\sin((\lambda + \mu)\pi) C_{(\varrho), \nu}^{\lambda, \mu}(z) - \frac{\pi}{2} \cos((\lambda + \mu)\pi) C_{\nu}^{\lambda, \mu}(z) \right) \end{cases}$$

Il vient donc immédiatement les formules suivantes pour les fonctions hyper-sphéroïdales de première et deuxième espèce de type 1 pour μ et ν quelconques :

$$\begin{aligned} \nu, \mu \in \mathbf{R} \quad \lambda = \frac{2p+1}{2} \quad p \in \mathbf{N} \\ \begin{cases} hps_{\nu}^{\lambda, -\mu}(z, \gamma^2) = \frac{\Gamma(2\lambda + \nu - \mu)}{\Gamma(\nu + \mu + 1)} \left(\sin((\lambda - \mu)\pi) hps_{\nu}^{\lambda, \mu - (2\lambda - 1)}(z, \gamma^2) - \frac{2}{\pi} \cos((\lambda - \mu)\pi) hqs_{\nu}^{\lambda, \mu - (2\lambda - 1)}(z, \gamma^2) \right) \\ hqs_{\nu}^{\lambda, -\mu}(z, \gamma^2) = \frac{\Gamma(2\lambda + \nu - \mu)}{\Gamma(\nu + \mu + 1)} \left(\sin((\lambda - \mu)\pi) hqs_{\nu}^{\lambda, \mu - (2\lambda - 1)}(z, \gamma^2) + \frac{\pi}{2} \cos((\lambda - \mu)\pi) hps_{\nu}^{\lambda, \mu - (2\lambda - 1)}(z, \gamma^2) \right) \\ hps_{\nu}^{\lambda, -\mu+1-2\lambda}(z, \gamma^2) = \frac{\Gamma(\nu - \mu + 1)}{\Gamma(\nu + \mu + 2\lambda)} \left(\sin((\lambda + \mu)\pi) hps_{\nu}^{\lambda, \mu}(z, \gamma^2) + \frac{2}{\pi} \cos((\lambda + \mu)\pi) hqs_{\nu}^{\lambda, \mu}(z, \gamma^2) \right) \\ hqs_{\nu}^{\lambda, -\mu+1-2\lambda}(z, \gamma^2) = \frac{\Gamma(\nu - \mu + 1)}{\Gamma(\nu + \mu + 2\lambda)} \left(\sin((\lambda + \mu)\pi) hqs_{\nu}^{\lambda, \mu}(z, \gamma^2) - \frac{\pi}{2} \cos((\lambda + \mu)\pi) hps_{\nu}^{\lambda, \mu}(z, \gamma^2) \right) \end{cases} \end{aligned}$$

La condition de normalisation de la fonction hyper-sphéroïdale de première espèce implique la relation suivante :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(d_{\nu, k}^{\lambda, \mu}(\gamma^2) \right)^2 \frac{2\lambda + 2\nu}{2\lambda + 2\nu + 4k} \frac{\Gamma(\nu + 2k + \mu + 2\lambda)}{\Gamma(\nu + 2k - \mu + 1)} \frac{\Gamma(\nu - \mu + 1)}{\Gamma(\nu + \mu + 2\lambda)} = 1$$

Elle doit rester inchangée par la transformation $\mu \rightarrow -\mu+1-2\lambda$. Soit :

$$\left(d_{\nu, k}^{\lambda, -\mu+1-2\lambda}(\gamma^2) \right)^2 = \left(d_{\nu, k}^{\lambda, \mu}(\gamma^2) \right)^2 \left(\frac{\Gamma(\nu + 2k + \mu + 2\lambda)}{\Gamma(\nu + 2k - \mu + 1)} \right)^2 \left(\frac{\Gamma(\nu - \mu + 1)}{\Gamma(\nu + \mu + 2\lambda)} \right)^2$$

Il s'ensuit la relation suivante de transformation retranscrite dans les coefficients du développement :

$$d_{\nu, k}^{\lambda, -\mu+1-2\lambda}(\gamma^2) = \frac{\Gamma(\nu + \mu + 2\lambda + 2k)}{\Gamma(\nu - \mu + 1 + 2k)} \frac{\Gamma(\nu - \mu + 1)}{\Gamma(\nu + \mu + 2\lambda)} d_{\nu, k}^{\lambda, \mu}(\gamma^2)$$

Pour les fonctions de Gegenbauer associées de type 2, nous avons :

$$\lambda, \nu \in \mathbf{R} \quad \mu \in \mathbf{N} \quad \text{ou} \quad \nu, \mu \in \mathbf{R} \quad \lambda = \frac{2p+1}{2} \quad p \in \mathbf{N}$$

$$\rightarrow \begin{cases} C_{2,\nu}^{\lambda, -\mu+1-2\lambda}(z) = \frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(2\lambda+\nu+\mu)} \left(C_{2,\nu}^{\lambda, \mu}(z) + \frac{2}{\pi} e^{-i\left(\mu+\lambda-\frac{1}{2}\right)\pi} \cos(\pi(\lambda+\mu)) C_{2,(Q),\nu}^{\lambda, \mu}(z) \right) \\ C_{2,(Q),\nu}^{\lambda, -\mu+1-2\lambda}(z) = e^{-2i\left(\lambda+\mu-\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(2\lambda+\nu+\mu)} C_{2,(Q),\nu}^{\lambda, \mu}(z) \end{cases}$$

Il vient donc immédiatement les formules suivantes pour les fonctions hyper-sphéroïdales de première et deuxième espèce de type 2 pour μ et ν quelconques :

$$\lambda, \nu \in \mathbf{R} \quad \mu \in \mathbf{N} \quad \text{ou} \quad \nu, \mu \in \mathbf{R} \quad \lambda = \frac{2p+1}{2} \quad p \in \mathbf{N}$$

$$\rightarrow \begin{cases} HPS_v^{\lambda, -\mu+1-2\lambda}(z, \gamma^2) = \frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(2\lambda+\nu+\mu)} \left(HPS_v^{\lambda, \mu}(z, \gamma^2) + \frac{2}{\pi} e^{-i\left(\mu+\lambda-\frac{1}{2}\right)\pi} \cos(\pi(\lambda+\mu)) HQS_v^{\lambda, \mu}(z, \gamma^2) \right) \\ HQS_v^{\lambda, -\mu+1-2\lambda}(z, \gamma^2) = e^{-2i\left(\lambda+\mu-\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(2\lambda+\nu+\mu)} HQS_v^{\lambda, \mu}(z, \gamma^2) \end{cases}$$

Transformation $\mu \rightarrow -\mu+1-2\lambda$ sur les fonctions radiales

La transformation $\mu \rightarrow -\mu+1-2\lambda$ laissant invariante l'équation différentielle des ondes hyper-sphéroïdales, les solutions $HS_v^{(i)\lambda, -\mu+1-2\lambda}(x, \gamma^2)$ sont nécessairement combinaisons linéaires de deux solutions $HS_v^{(i)\lambda, \mu}(x, \gamma^2)$. De plus les 2 solutions $HS_v^{(1,2)\lambda, -\mu+1-2\lambda}(x, \gamma^2)$ doivent avoir exactement le même comportement asymptotique en $x \rightarrow \infty$ que les deux solutions $HS_v^{(1,2)\lambda, \mu}(x, \gamma^2)$, tout en ayant également les mêmes conditions de régularité (ou d'irrégularité en $x=0$). Il s'ensuit que ces deux types de fonctions sont rigoureusement identiques et par delà les 4 types de fonctions radiales :

$$HS_v^{(i)\lambda, -\mu+1-2\lambda}(x, \gamma^2) = HS_v^{(i)\lambda, \mu}(x, \gamma^2)$$

Transformation $z \rightarrow -z$

Nous savons que :

$$\begin{cases} C_v^{\lambda, \mu}(z) = -\frac{2 \cos((v + \mu)\pi) C_{(Q),v}^{\lambda, \mu}(z) + C_{(Q),v}^{\lambda, \mu}(-z)}{\pi \sin((v + \mu)\pi)} \\ C_{(Q),v}^{\lambda, \mu}(z) = \frac{\pi \cos((v + \mu)\pi) C_v^{\lambda, \mu}(z) - C_v^{\lambda, \mu}(-z)}{2 \sin((v + \mu)\pi)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_v^{\lambda, \mu}(-z) = \cos((v + \mu)\pi) C_v^{\lambda, \mu}(z) - \frac{2}{\pi} \sin((v + \mu)\pi) C_{(Q),v}^{\lambda, \mu}(z) \\ C_{(Q),v}^{\lambda, \mu}(-z) = -\cos((v + \mu)\pi) C_{(Q),v}^{\lambda, \mu}(z) - \frac{\pi}{2} \sin((v + \mu)\pi) C_v^{\lambda, \mu}(z) \end{cases}$$

Dès lors, il est facile d'obtenir les relations suivantes sur les fonctions hyper-sphéroïdales pour les cas v, μ non-entiers et entiers :

$$\begin{cases} hps_v^{\lambda, \mu}(-z, \gamma^2) = \cos((v + \mu)\pi) hps_v^{\lambda, \mu}(z, \gamma^2) - \frac{2}{\pi} \sin((v + \mu)\pi) hqs_v^{\lambda, \mu}(z, \gamma^2) \\ hqs_v^{\lambda, \mu}(-z, \gamma^2) = -\cos((v + \mu)\pi) hqs_v^{\lambda, \mu}(z, \gamma^2) - \frac{\pi}{2} \sin((v + \mu)\pi) hps_v^{\lambda, \mu}(z, \gamma^2) \end{cases} \Rightarrow v, \mu \in \mathbf{N} \quad \begin{cases} hps_v^{\lambda, \mu}(-z, \gamma^2) = (-1)^{v+\mu} hps_v^{\lambda, \mu}(z, \gamma^2) \\ hqs_v^{\lambda, \mu}(-z, \gamma^2) = (-1)^{v+\mu+1} hqs_v^{\lambda, \mu}(z, \gamma^2) \end{cases}$$

Calcul du facteur de jointure des fonctions d'onde hyper-sphéroïdales entre les fonctions radiales et angulaires

Reprenons les constructions formelles des fonctions sphéroïdale radiales et angulaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} HPS_v^\mu(x, \gamma^2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k d_{v,k}^\mu(\gamma^2) C_{2,v+2k}^{\lambda,\mu}(x) \quad \text{Fonctions associées de Gegenbauer} \quad C_{2,v+2k}^{\lambda,\mu}(x) \quad x \geq 1 \\ QS_v^\mu(x, \gamma^2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k d_{v,k}^\mu(\gamma^2) C_{2,(Q),v+2k}^{\lambda,\mu}(x) \quad \text{Fonctions associées de Gegenbauer} \quad C_{2,(Q),v+2k}^{\lambda,\mu}(x) \quad x \geq 1 \\ HS_v^{(1),\mu}(x, \gamma^2) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-x^{-2})^{\frac{\mu}{2}}}{A_v^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_{v,k}^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2) \frac{J_{v+\lambda+2k}(\gamma x)}{(\gamma x)^\lambda} \\ A_v^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k d_{v,k}^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2) \quad A_v^{\lambda,\mu}(\gamma^2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k d_{v,k}^{\lambda,\mu}(\gamma^2) \end{array} \right.$$

Soit le développement de la fonctions de Bessel de première espèce et application à la fonction sphéroïdale radiale de première espèce :

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &= \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l}{\Gamma(l+1+\nu)l!} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2l} \Rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{J_{\nu+\lambda+2k}(\gamma x)}{(\gamma x)^\lambda} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\lambda+\frac{1}{2}}} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l}{\Gamma(l+\nu+1+\lambda+2k)l!} \left(\frac{\gamma x}{2}\right)^{\nu+2l+2k} \\ HS_v^{(1),\lambda,\mu}(x, \gamma^2) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-x^{-2})^{\frac{\mu}{2}}}{A_v^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_{v,k}^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2) \frac{J_{v+\lambda+2k}(\gamma x)}{(\gamma x)^\lambda} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\lambda+\frac{1}{2}}} \frac{(1-x^{-2})^{\frac{\mu}{2}}}{A_v^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l d_{v,k}^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2)}{\Gamma(l+\nu+1+\lambda+2k)l!} \left(\frac{\gamma x}{2}\right)^{\nu+2l+2k} \\ \text{Comme } \forall t_{k,l}, z &\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} t_{k,l} z^{l+k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} t_{k-l,l} z^k \\ \Rightarrow HS_v^{(1),\lambda,\mu}(x, \gamma^2) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\lambda+\frac{1}{2}}} \frac{(1-x^{-2})^{\frac{\mu}{2}}}{A_v^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l d_{v,k-l}^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2)}{\Gamma(-l+\nu+1+\lambda+2k)l!} \left(\frac{\gamma x}{2}\right)^{\nu+2k} \\ \Rightarrow HS_v^{(1),\lambda,\mu}(x, \gamma^2) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\nu+\lambda+\frac{1}{2}}} \frac{\gamma^\nu}{A_v^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2)} x^\nu (1-x^{-2})^{\frac{\mu}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2x)^{2k}} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{2^{4k} (-1)^l d_{v,-k-l}^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2)}{\gamma^{2k} \Gamma(-l-2k+\nu+1+\lambda)l!} \leftarrow k \leftrightarrow -k \end{aligned}$$

Soit maintenant les développements de la fonction de Gegenbauer associée Q (type 2) et l'application à la fonction angulaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda, \nu \in \mathbf{R} \\ \mu \in \mathbf{N} \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_{1,\nu}^{\lambda,\mu}(z) = (-1)^\mu \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} \frac{\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)} (1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{1,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z) \quad C_{2,\nu}^{\lambda,\mu}(z) = \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} \frac{\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)} (z^2-1)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z) \\ C_{1,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z) = (-1)^\mu \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} \frac{\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)} (1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} Q_{1,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z) \quad C_{2,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z) = e^{2i\pi\left(\lambda-\frac{1}{2}+\mu\right)} \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} \frac{\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)} (z^2-1)^{\frac{1-2\lambda}{4}} Q_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu, \mu \in \mathbf{R} \\ \lambda = \frac{2p+1}{2} \\ p \in \mathbf{N} \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_{1,\nu}^{\lambda,\mu}(z) = (-1)^{\frac{1-2\lambda}{2}} \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} (1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{1,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z) \quad C_{2,\nu}^{\lambda,\mu}(z) = \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} (z^2-1)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z) \\ C_{1,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z) = (-1)^{\frac{1-2\lambda}{2}} \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} (1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} Q_{1,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z) \quad C_{2,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z) = \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} (z^2-1)^{\frac{1-2\lambda}{4}} Q_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z) \end{array} \right.$$

Il n'est pas utile de prendre en compte le premier jeu de valeurs de paramètres μ, λ quant aux fonctions de Gegenbauer associées de deuxième espèce, car il se déduit simplement par la relation :

$$Q_{2,\nu}^{-\mu}(z) = e^{-2i\pi\mu} \frac{\Gamma(\nu - \mu + 1)}{\Gamma(\nu + \mu + 1)} Q_{2,\nu}^{\mu}(z) \Rightarrow Q_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z) = e^{-2i\pi\left(\lambda+\mu-\frac{1}{2}\right)} \frac{\Gamma(\nu - \mu + 1)}{\Gamma(\nu + \mu + 2\lambda)} Q_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda+\mu-\frac{1}{2}}(z)$$

$$\lambda, \nu \in \mathbf{R} \quad \mu \in \mathbf{N} \quad C_{2,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z) = \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} e^{2i\pi\left(\lambda-\frac{1}{2}+\mu\right)} \frac{\Gamma(\nu + \mu + 2\lambda)}{\Gamma(\nu - \mu + 1)} (z^2 - 1)^{\frac{1-2\lambda}{4}} Q_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z)$$

$$\Rightarrow \nu, \mu \in \mathbf{R} \quad \lambda = \frac{2p+1}{2} \quad p \in \mathbf{N} \quad C_{2,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z) = \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} (z^2 - 1)^{\frac{1-2\lambda}{4}} Q_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda+\mu-\frac{1}{2}}(z)$$

Avec le deuxième jeu de valeurs de paramètres μ, λ :

$$\begin{cases} C_{2,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(x) = \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} (x^2 - 1)^{\frac{1-2\lambda}{4}} Q_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(x) \\ Q_{2,\nu}^{\mu}(x) = \frac{e^{i\mu\pi} \sqrt{\pi}}{2^{\nu+1}} \frac{\Gamma(\mu + \nu + 1)}{\Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right)} x^{-\mu-\nu-1} (x+1)^{\frac{\mu}{2}} (x-1)^{\frac{\mu}{2}} {}_2F_1\left(\frac{\mu + \nu + 1}{2}, \frac{\mu + \nu + 2}{2}; \nu + \frac{3}{2}; \frac{1}{x^2}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow Q_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(x) = \frac{e^{i\left(\lambda-\frac{1}{2}+\mu\right)\pi} \sqrt{\pi}}{2^{\lambda+\nu+\frac{1}{2}}} \frac{\Gamma(2\lambda + \mu + \nu)}{\Gamma(\lambda + \nu + 1)} x^{-2\lambda-\mu-\nu} (x+1)^{\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{4}+\frac{\mu}{2}} (x-1)^{\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{4}+\frac{\mu}{2}} {}_2F_1\left(\frac{2\lambda + \mu + \nu}{2}, \frac{2\lambda + \mu + \nu + 1}{2}; \lambda + \nu + 1; \frac{1}{x^2}\right)$$

$$\Rightarrow C_{2,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(x) = \frac{2^{-\nu-2\lambda} e^{i\left(\lambda-\frac{1}{2}+\mu\right)\pi} \pi}{\Gamma(\lambda)} \Gamma(2\lambda + \mu + \nu) x^{-2\lambda-\mu-\nu} (x+1)^{\frac{\mu}{2}} (x-1)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{2\lambda + \mu + \nu + 2l}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2\lambda + \mu + \nu + 1 + 2l}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2\lambda + \mu + \nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2\lambda + \mu + \nu + 1}{2}\right) \Gamma(\lambda + \nu + 1 + l)} \frac{1}{l!} \frac{1}{x^{2l}}$$

Or $\begin{cases} \Gamma(\mu + \nu + 2\lambda) = \frac{2^{\mu+\nu+2\lambda-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\mu + \nu + 2\lambda}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu + \nu + 2\lambda + 1}{2}\right) \\ \Gamma(\mu + \nu + 2\lambda + 2l) = \frac{2^{\mu+\nu+2\lambda-1+2l}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\mu + \nu + 2\lambda + 2l}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu + \nu + 2\lambda + 1 + 2l}{2}\right) \end{cases}$

$$\Rightarrow C_{2,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(x) = \frac{\pi e^{i\left(\lambda-\frac{1}{2}+\mu\right)\pi} x^{-\mu} (x+1)^{\frac{\mu}{2}} (x-1)^{\frac{\mu}{2}}}{\Gamma(\lambda) (2x)^{\nu+2\lambda}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} \frac{\Gamma(\mu + \nu + 2\lambda + 2l)}{\Gamma(\lambda + \nu + 1 + l)} \frac{1}{l!} \frac{1}{(2x)^{2l}}$$

$$HQ S_{\nu}^{\lambda,\mu}(x, \gamma^2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k d_{\nu,k}^{\lambda,\mu}(\gamma^2) C_{2,(Q),\nu+2k}^{\lambda,\mu} = \frac{\pi e^{i\left(\lambda-\frac{1}{2}+\mu\right)\pi} x^{-\mu} (x+1)^{\frac{\mu}{2}} (x-1)^{\frac{\mu}{2}}}{\Gamma(\lambda) (2x)^{\nu+2\lambda}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \frac{d_{\nu,k}^{\lambda,\mu}(\gamma^2)}{(2x)^{2k}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} \frac{\Gamma(\mu + \nu + 2\lambda + 2l + 2k)}{\Gamma(\lambda + \nu + 1 + l + 2k)} \frac{1}{l!} \frac{1}{(2x)^{2l}}$$

Comme $\forall t_{k,l}, z \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} t_{k,l} z^{l+k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} t_{k-l,l} z^k$ De plus $d_{-\nu-2\lambda,k-l}^{\lambda,\mu}(\gamma^2) = d_{\nu,l-k}^{\lambda,\mu}(\gamma^2)$

$$HQ S_{\nu}^{\lambda,\mu}(x, \gamma^2) = \frac{\pi e^{i\left(\lambda-\frac{1}{2}+\mu\right)\pi} x^{-\mu} (x+1)^{\frac{\mu}{2}} (x-1)^{\frac{\mu}{2}}}{\Gamma(\lambda) (2x)^{\nu+2\lambda}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2x)^{2k}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} (-1)^{k-l} \frac{\Gamma(\mu + \nu + 2\lambda + 2k)}{\Gamma(\lambda + \nu + 1 - l + 2k)} \frac{1}{l!} d_{\nu,k-l}^{\lambda,\mu}(\gamma^2)$$

$$\Rightarrow HQ S_{-\nu-2\lambda}^{\lambda,\mu}(x, \gamma^2) = \frac{2^{\nu} \pi e^{i\left(\lambda-\frac{1}{2}+\mu\right)\pi} x^{\nu} (1-x^{-2})^{\frac{\mu}{2}}}{\Gamma(\lambda)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2x)^{2k}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} (-1)^{k-l} \frac{\Gamma(\mu - \nu + 2k)}{\Gamma(-\nu + 2k + 1 - \lambda - l)} \frac{1}{l!} d_{-\nu-2\lambda,k-l}^{\lambda,\mu}(\gamma^2)$$

$$\Rightarrow HQ S_{-\nu-2\lambda}^{\lambda,\mu}(x, \gamma^2) = \frac{2^{\nu} \pi e^{i\left(\lambda-\frac{1}{2}+\mu\right)\pi}}{\Gamma(\lambda)} x^{\nu} (1-x^{-2})^{\frac{\mu}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2x)^{2k}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} (-1)^{k-l} \frac{\Gamma(\mu - \nu + 2k)}{\Gamma(-\nu + 2k + 1 - \lambda - l)} \frac{1}{l!} d_{\nu,l-k}^{\lambda,\mu}(\gamma^2)$$

Or $HQS_{-v-2\lambda}^{\lambda,\mu}(x,\gamma^2)$ tout comme $HQS_v^{\lambda,\mu}(x,\gamma^2)$ sont solutions de la même équation différentielle des ondes hyper-sphéroïdales sur le même domaine. Toutes deux doivent donc être des combinaisons linéaires des fonctions radiales $HS_v^{(1),\lambda,\mu}(x,\gamma^2), HS_v^{(2),\lambda,\mu}(x,\gamma^2)$. D'autre part la fonction radiale $HS_v^{(2),\lambda,\mu}(x,\gamma^2)$ ne peut avoir les mêmes puissances de x dans son développement de par sa construction. Il en résulte que les fonctions $HQS_{-v-2\lambda}^{\lambda,\mu}(x,\gamma^2)$ et $HS_v^{(1),\lambda,\mu}(x,\gamma^2)$ sont nécessairement proportionnelles car elles ont les mêmes puissance de x dans la série de Laurent. Cela implique que

le rapport :
$$\frac{\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{2^{4k} (-1)^l d_{v,-k-l}^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2)}{\gamma^{2k} \Gamma(-l-2k+v+1+\lambda) l!}}{\sum_{l=0}^{l=+\infty} (-1)^{k-l} \frac{\Gamma(\mu-v+2k)}{\Gamma(-v+2k+1-\lambda-l) l!} \frac{1}{l!} d_{v,l-k}^{\lambda,\mu}(\gamma^2)}$$
 est indépendant de la valeur k , autant choisir

donc ce rapport à la valeur $k=0$, soit :
$$\frac{1}{\Gamma(\mu-v)} \frac{\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l d_{v,-l}^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2)}{\Gamma(-l+v+1+\lambda) l!}}{\sum_{l=0}^{l=+\infty} \frac{(-1)^l d_{v,l}^{\lambda,\mu}(\gamma^2)}{\Gamma(-v+1-\lambda-l) l!}}$$
. C'est ce lien qui va permettre

d'introduire formellement le facteur de jointure. Si l'on définit le facteur de jointure comme partie du facteur de proportionnalité des deux fonctions comme suit :

$$HS_v^{(1),\lambda,\mu}(x,\gamma^2) = K_v^{(1),\lambda,\mu}(\gamma^2) \frac{\sin((\mu-v)\pi)}{\pi \sin(\lambda\pi)} e^{-i(\mu+v)\pi} e^{-i\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\pi} HQS_{-v-2\lambda}^{\lambda,\mu}(x,\gamma^2)$$

Alors le facteur de jointure s'écrit :

$$K_v^{(1),\lambda,\mu} = 2^{-2v-\lambda-\frac{1}{2}} e^{i v \pi} \sin(\lambda \pi) \frac{\Gamma(\lambda) \Gamma(1+v-\mu)}{\sqrt{\pi}} \frac{\gamma^v}{A_v^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2)} \frac{\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l d_{v,-l}^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2)}{\Gamma(-l+v+1+\lambda) l!}}{\sum_{l=0}^{l=+\infty} \frac{(-1)^l d_{v,l}^{\lambda,\mu}(\gamma^2)}{\Gamma(-v+1-\lambda-l) l!}}$$

On a établi les relations de transformations suivantes sur les fonctions HPS et HQS :

$$\lambda, v \in \mathbf{R} \quad \mu \in \mathbf{N} \quad \text{ou} \quad v, \mu \in \mathbf{R} \quad \lambda = \frac{2p+1}{2} \quad p \in \mathbf{N} \rightarrow \begin{cases} HPS_{-v-2\lambda}^{\lambda,\mu}(z) = -\frac{\sin(\pi(v+2\lambda))}{\sin(\pi v)} HPS_v^{\lambda,\mu}(z) \\ HQS_{-v-2\lambda}^{\lambda,\mu}(z) = \frac{\pi e^{i\left(\lambda+\mu-\frac{1}{2}\right)\pi} \sin((\lambda+v)\pi) HPS_v^{\lambda,\mu}(z) - \sin(\pi(\mu+v)) HQS_v^{\lambda,\mu}(z)}{\sin(\pi(\mu-v))} \end{cases}$$

Pour des valeurs entières d'ordre μ , on sait que :

$$\mu = m \in \mathbf{Z} \rightarrow HQS_{-v-2\lambda}^{\lambda,m}(x,\gamma^2) = HQS_v^{\lambda,m}(z) - \pi e^{i\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{\sin((\lambda+v)\pi)}{\sin(v\pi)} HPS_v^{\lambda,m}(z)$$

Dans ce cas la liaison entre les deux fonctions s'écrit donc :

$$HS_v^{(1),\lambda,m}(x,\gamma^2) = -\frac{e^{-iv\pi} K_v^{(1),\lambda,m}(\gamma^2)}{\sin(\lambda\pi)} \frac{\sin(v\pi)}{\pi} e^{-i\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\pi} \left\{ HQS_v^{\lambda,m}(z) - \pi e^{i\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{\sin((\lambda+v)\pi)}{\sin(v\pi)} HPS_v^{\lambda,m}(z) \right\}$$

$$\Rightarrow HS_v^{(1),\lambda,m}(x,\gamma^2) = \frac{e^{-iv\pi} K_v^{(1),\lambda,m}(\gamma^2)}{\sin(\lambda\pi)} \left\{ -\frac{\sin(v\pi)}{\pi} e^{-i\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\pi} HQS_v^{\lambda,m}(z) + \sin((\lambda+v)\pi) HPS_v^{\lambda,m}(z) \right\}$$

Si maintenant le degré $v=n$ est également entier, alors :

$$v = n, m \in \mathbf{N} \quad HS_v^{(1),\lambda,m}(x, \gamma^2) = K_v^{(1),\lambda,m}(\gamma^2) HPS_v^{\lambda,m}(z)$$

Il est possible de montrer la relation suivante sur le facteur de jointure introduit ici :

$$K_v^{(1),\lambda,-\mu+1-2\lambda} = 2^{-2v-\lambda-\frac{1}{2}} e^{i v \pi} \sin(\lambda \pi) \frac{\Gamma(\lambda) \Gamma(v + \mu + 2\lambda)}{\sqrt{\pi}} \frac{\gamma^v}{A_v^{\lambda,\mu}(\gamma^2)} \frac{\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l d_{v,-l}^{\lambda,\mu}(\gamma^2)}{\Gamma(v + \lambda + 1 - l) l!}}{\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l d_{v,l}^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2)}{\Gamma(-v + 1 - \lambda - l) l!}}$$

$$K_{-v-2\lambda}^{(1),\lambda,\mu} = 2^{2v+3\lambda-\frac{1}{2}} e^{-i v \pi} e^{-2i\lambda\pi} \sin(\lambda \pi) \frac{\Gamma(\lambda) \Gamma(1 - v - 2\lambda - \mu)}{\sqrt{\pi}} \frac{\gamma^{-v-2\lambda}}{A_{-v-2\lambda}^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2)} \frac{\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l d_{-v-2\lambda,-l}^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2)}{\Gamma(-v + 1 - \lambda - l) l!}}{\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l d_{-v-2\lambda,l}^{\lambda,\mu}(\gamma^2)}{\Gamma(v + \lambda + 1 - l) l!}}$$

$$\begin{cases} d_{-v-2\lambda,k}^{\lambda,\mu}(\gamma^2) = d_{v,-k}^{\lambda,\mu}(\gamma^2) \\ A_{-v-2\lambda}^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2) = A_v^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow K_{-v-2\lambda}^{(1),\lambda,\mu}(\gamma^2) K_v^{(1),\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2) A_v^{\lambda,\mu}(\gamma^2) A_v^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2) = \frac{\pi e^{-i(2\lambda-1)\pi} 2^{2\lambda-1} \left(\sin(\lambda \pi) \frac{\Gamma(\lambda)}{\gamma^\lambda \sqrt{\pi}} \right)^2}{\sin(\pi(v + \mu + 2\lambda - 1))}$$

En appliquant la transformation $v \rightarrow -v-2\lambda$ sur la formule initiale de liaison :

$$HS_v^{(1),\lambda,\mu}(x, \gamma^2) = K_v^{(1),\lambda,\mu}(\gamma^2) \frac{\sin((\mu - v)\pi)}{\pi \sin(\lambda \pi)} e^{-i(\mu+v)\pi} e^{-i\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\pi} HQS_{-v-2\lambda}^{\lambda,\mu}(x, \gamma^2)$$

$$\Rightarrow HS_{-v-2\lambda}^{(1),\lambda,\mu}(x, \gamma^2) = K_{-v-2\lambda}^{(1),\lambda,\mu}(\gamma^2) \frac{\sin((\mu + v + 2\lambda - 1)\pi)}{\pi \sin(\lambda \pi)} e^{-i(\mu-v)\pi} e^{i\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\pi} HQS_v^{\lambda,\mu}(x, \gamma^2)$$

En usant de la formule de connexion entre les deux facteurs de jointure :

$$K_{-v-2\lambda}^{(1),\lambda,\mu}(\gamma^2) K_v^{(1),\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2) A_v^{\lambda,\mu}(\gamma^2) A_v^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2) = \frac{\pi e^{-i(2\lambda-1)\pi} 2^{2\lambda-1} \left(\sin(\lambda \pi) \frac{\Gamma(\lambda)}{\gamma^\lambda \sqrt{\pi}} \right)^2}{\sin(\pi(v + \mu + 2\lambda - 1))}$$

Il vient :

$$K_{-v-2\lambda}^{(1),\lambda,\mu}(\gamma^2) = \frac{\pi e^{-2i\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\pi} 2^{2\lambda-1} \left(\sin(\lambda \pi) \frac{\Gamma(\lambda)}{\gamma^\lambda \sqrt{\pi}} \right)^2}{\sin(\pi(v + \mu + 2\lambda - 1)) K_v^{(1),\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2) A_v^{\lambda,\mu}(\gamma^2) A_v^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2)}$$

$$\Rightarrow HS_{-v-2\lambda}^{(1),\lambda,\mu}(x, \gamma^2) = \frac{e^{-i\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\pi} e^{-i(\mu-v)\pi} 2^{2\lambda-1} \sin(\lambda \pi) \left(\frac{\Gamma(\lambda)}{\gamma^\lambda \sqrt{\pi}} \right)^2}{K_v^{(1),\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2) A_v^{\lambda,\mu}(\gamma^2) A_v^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2)} HQS_v^{\lambda,\mu}(x, \gamma^2)$$

On peut encore tourner cette formule de la manière suivante :

$$\begin{cases} HS_{-v-2\lambda}^{(1),\lambda,\mu}(x,\gamma^2) = HS_{-v-2\lambda}^{(1),\lambda,-\mu+1-2\lambda}(x,\gamma^2) \\ HQS_v^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(x,\gamma^2) = e^{-2i\left(\lambda+\mu-\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{\Gamma(v-\mu+1)}{\Gamma(v+\mu+2\lambda)} HQS_v^{\lambda,\mu}(x,\gamma^2) \end{cases}$$

$$HS_{-v-2\lambda}^{(1),\lambda,-\mu+1-2\lambda}(x,\gamma^2) = \left(\frac{\Gamma(\lambda)}{\gamma^\lambda \sqrt{\pi}} \right)^2 \frac{e^{i\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\pi} e^{i(\mu+v)\pi} 2^{2\lambda-1} \text{Sin}(\lambda \pi)}{K_v^{(1),\lambda,\mu}(\gamma^2) A_v^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2) A_v^{\lambda,\mu}(\gamma^2)} HQS_v^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(x,\gamma^2)$$

$$\Rightarrow HS_{-v-2\lambda}^{(1),\lambda,-\mu+1-2\lambda}(x,\gamma^2) = \left(\frac{\Gamma(\lambda)}{\gamma^\lambda \sqrt{\pi}} \right)^2 \frac{e^{-i\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\pi} e^{i(v-\mu)\pi} 2^{2\lambda-1} \text{Sin}(\lambda \pi)}{K_v^{(1),\lambda,\mu}(\gamma^2) A_v^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2) A_v^{\lambda,\mu}(\gamma^2)} \frac{\Gamma(v-\mu+1)}{\Gamma(v+\mu+2\lambda)} HQS_v^{\lambda,\mu}(x,\gamma^2)$$

En comparant deux résultats obtenus, j'obtiens une autre formule très utile :

$$\begin{cases} HS_{-v-2\lambda}^{(1),\lambda,\mu}(x,\gamma^2) = \frac{1}{K_v^{(1),\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2)} \left(\frac{\Gamma(\lambda)}{\gamma^\lambda \sqrt{\pi}} \right)^2 \frac{e^{-i\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\pi} e^{i(v-\mu)\pi} 2^{2\lambda-1} \text{Sin}(\lambda \pi)}{A_v^{\lambda,\mu}(\gamma^2) A_v^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2)} HQS_v^{\lambda,\mu}(x,\gamma^2) \\ HS_{-v-2\lambda}^{(1),\lambda,-\mu+1-2\lambda}(x,\gamma^2) = HS_{-v-2\lambda}^{(1),\lambda,\mu}(x,\gamma^2) = \frac{1}{K_v^{(1),\lambda,\mu}(\gamma^2)} \frac{\Gamma(v-\mu+1)}{\Gamma(v+\mu+2\lambda)} \left(\frac{\Gamma(\lambda)}{\gamma^\lambda \sqrt{\pi}} \right)^2 \frac{e^{-i\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\pi} e^{i(v-\mu)\pi} 2^{2\lambda-1} \text{Sin}(\lambda \pi)}{A_v^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2) A_v^{\lambda,\mu}(\gamma^2)} HQS_v^{\lambda,\mu}(x,\gamma^2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow K_v^{(1),\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2) = K_v^{(1),\lambda,\mu}(\gamma^2) \frac{\Gamma(v+\mu+2\lambda)}{\Gamma(v-\mu+1)} \quad \forall v, \mu$$

Une des formules précédentes introduit donc un deuxième facteur de jointure :

$$K_v^{(2),\lambda,\mu}(\gamma^2) = \frac{e^{-i(\mu+1)\pi} 2^{2\lambda-1} \text{Sin}(\lambda \pi)}{K_v^{(1),\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2) A_v^{\lambda,\mu}(\gamma^2) A_v^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2)} \left(\frac{\Gamma(\lambda)}{\gamma^\lambda \sqrt{\pi}} \right)^2 = \frac{e^{-i(\mu+1)\pi} 2^{2\lambda-1} \text{Sin}(\lambda \pi)}{K_v^{(1),\lambda,\mu}(\gamma^2) A_v^{\lambda,\mu}(\gamma^2) A_v^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2)} \left(\frac{\Gamma(\lambda)}{\gamma^\lambda \sqrt{\pi}} \right)^2 \frac{\Gamma(v-\mu+1)}{\Gamma(v+\mu+2\lambda)}$$

$$\Rightarrow HS_{-v-2\lambda}^{(1),\lambda,\mu}(x,\gamma^2) = -e^{-i\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\pi} e^{i v \pi} K_v^{(2),\lambda,\mu}(\gamma^2) HQS_v^{\lambda,\mu}(x,\gamma^2)$$

Toujours dans l'hypothèse où $v=n$ est entier et λ demi-entier, la formule de connexion suivante est applicable :

$$\begin{cases} v = n \in \mathbf{Z} \\ \lambda = \frac{2p+1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} HS_{-n-2\lambda}^{(2),\lambda,\mu}(x,\gamma^2) = (-1)^{n+p} HS_n^{(1),\lambda,\mu}(x,\gamma^2) \Leftrightarrow HS_{-n-2\lambda}^{(1),\lambda,\mu}(x,\gamma^2) = -(-1)^{n+p} HS_n^{(2),\lambda,\mu}(x,\gamma^2) \\ HS_{-n-2\lambda}^{(2),\lambda,-\mu}(x,\gamma^2) = HS_{-n-2\lambda}^{(2),\lambda,\mu}(x,\gamma^2) = (-1)^{n+p} HS_{-n-2\lambda}^{(1),\lambda,-\mu}(x,\gamma^2) = -(-1)^{n+p} HS_n^{(2),\lambda,\mu}(x,\gamma^2) \end{cases}$$

Alors si $\mu=m$ est un entier ou même un réel, n entier et λ demi-entier, il vient :

$$HS_{-n-2\lambda}^{(1),\lambda,\mu}(x,\gamma^2) = -(-1)^{n+p} HS_{-n-2\lambda}^{(2),\lambda,\mu}(x,\gamma^2)$$

$$\Rightarrow HS_n^{(2),\lambda,\mu}(x,\gamma^2) = \frac{e^{-i(\mu+1)\pi} 2^{2\lambda-1} \text{Sin}(\lambda \pi)}{K_n^{(1),\lambda,\mu}(\gamma^2) A_n^{\lambda,\mu}(\gamma^2) A_n^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2)} \left(\frac{\Gamma(\lambda)}{\gamma^\lambda \sqrt{\pi}} \right)^2 \frac{\Gamma(n-\mu+1)}{\Gamma(n+\mu+2\lambda)} HQS_n^{\lambda,\mu}(x,\gamma^2)$$

On a donc trouvé un autre facteur de jointure liant les fonctions radiales et angulaires de deuxième espèce. On les note :

$$HS_n^{(1),\lambda,\mu}(x,\gamma^2) = K_n^{(1),\lambda,\mu}(\gamma^2) HPS_n^{\lambda,\mu}(x,\gamma^2) \quad K_n^{(1),\lambda,\mu}(\gamma^2) = 2^{-2\nu-\lambda-\frac{1}{2}} e^{i\nu\pi} \sin(\lambda\pi) \frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(1+\nu-\mu)}{\sqrt{\pi}} \frac{\gamma^\nu}{A_n^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2)} \frac{\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l d_{\nu,-l}^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2)}{\Gamma(-l+\nu+1+\lambda)l!}}{\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l d_{\nu,l}^{\lambda,\mu}(\gamma^2)}{\Gamma(-\nu+1-\lambda-l)l!}}$$

$$HS_n^{(2),\lambda,\mu}(x,\gamma^2) = K_n^{(2),\lambda,\mu}(\gamma^2) HQS_n^{\lambda,\mu}(x,\gamma^2) \quad K_n^{(2),\lambda,\mu}(\gamma^2) = \frac{e^{-i(\mu+1)\pi} 2^{2\lambda-1} \sin(\lambda\pi)}{K_n^{(1),\lambda,\mu}(\gamma^2) A_n^{\lambda,\mu}(\gamma^2) A_n^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2)} \left(\frac{\Gamma(\lambda)}{\gamma^\lambda \sqrt{\pi}} \right)^2 \frac{\Gamma(n-\mu+1)}{\Gamma(n+\mu+2\lambda)}$$

Ces facteurs de jointure peuvent également se calculer d'une autre manière.

Calcul du facteur de jointure entre les fonctions radiales et les fonctions angulaires dans le cas des ordres et degrés entier et de λ demi-entier

On a donc établi pour ces valeurs de paramètres les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} HS_n^{(1),\lambda,m}(x,\gamma^2) = K_n^{(1),\lambda,m}(\gamma^2) HPS_n^{\lambda,m}(x,\gamma^2) \\ HS_n^{(2),\lambda,m}(x,\gamma^2) = K_n^{(2),\lambda,m}(\gamma^2) HQS_n^{\lambda,m}(x,\gamma^2) \\ K_n^{(2),\lambda,\mu}(\gamma^2) = \frac{(-1)^{m+1} 2^{2\lambda-1} \sin(\lambda\pi)}{K_n^{(1),\lambda,\mu}(\gamma^2) A_n^{\lambda,\mu}(\gamma^2) A_n^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2)} \left(\frac{\Gamma(\lambda)}{\gamma^\lambda \sqrt{\pi}} \right)^2 \frac{\Gamma(n-\mu+1)}{\Gamma(n+\mu+2\lambda)} \end{array} \right.$$

Pour obtenir une autre formule de calcul du facteur de jointure, il suffit d'appliquer la liaison pour la valeur d'argument $x=0$ tantôt sur les fonctions, tantôt sur les dérivées premières.

Dans le cas des paramètres $\mu=m$, $\nu=n$ entiers et λ demi-entier, on a établi que les développements étaient unilatéraux vers les indices k positif, commençant par un indice négatif $-k_0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_0 = \left\lfloor \frac{n-m}{2} \right\rfloor \quad hps_n^m(x,\gamma^2) = \sum_{k=-k_0}^{+\infty} (-1)^k d_{n,k}^{\lambda,m}(\gamma^2) C_{2,n+2k}^{\lambda,m}(x) \\ HS_n^{(1),m}(x,\gamma^2) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-x^{-2})^{\frac{m}{2}}}{A_n^{\lambda,-m+1-2\lambda}(\gamma^2)} \sum_{k=-k_0}^{+\infty} d_{n,k}^{\lambda,-m+1-2\lambda}(\gamma^2) \frac{J_{n+\lambda+2k}(\gamma x)}{(\gamma x)^\lambda} \\ A_n^{\lambda,-m+1-2\lambda}(\gamma^2) = \sum_{k=-k_0}^{+\infty} (-1)^k d_{n,k}^{\lambda,-m+1-2\lambda}(\gamma^2) \quad A_n^{\lambda,m}(\gamma^2) = \sum_{k=-k_0}^{+\infty} (-1)^k d_{n,k}^{\lambda,m}(\gamma^2) \end{array} \right.$$

Mais avant cela il convient de calculer les limites en $x=0$ des fonctions hyper-sphéroïdales radiales:

$$\begin{aligned}
 HS_n^{(1),\lambda,m}(x,\gamma^2) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-x^{-2})^{\frac{m}{2}}}{A_n^{\lambda,-m+1-2\lambda}(\gamma^2)(\gamma x)^\lambda} \sum_{k=-k_0}^{+\infty} d_{n,k}^{\lambda,-m+1-2\lambda}(\gamma^2) J_{n+\lambda+2k}(\gamma x) \quad k_0 = \left\lfloor \frac{n-m}{2} \right\rfloor \quad A_n^{\lambda,-m+1-2\lambda} = \sum_{k=-k_0}^{+\infty} (-1)^k d_{n,k}^{\lambda,-m+1-2\lambda}(\gamma^2) \quad k_0 = \begin{cases} \text{Si } n-m \text{ pair} & \frac{n-m}{2} \\ \text{Si } n-m \text{ impair} & \frac{n-m-1}{2} \end{cases} \\
 &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-x^{-2})^{\frac{m}{2}}}{A_n^{\lambda,-m+1-2\lambda}(\gamma^2)(\gamma x)^\lambda} \begin{cases} \text{Si } n-m \text{ pair} & \sum_{k=0}^{+\infty} d_{n,k}^{\lambda,-m+1-2\lambda}(\gamma^2) J_{m+\lambda+2k}(\gamma x) \\ \text{Si } n-m \text{ impair} & \sum_{k=0}^{+\infty} d_{n,k}^{\lambda,-m+1-2\lambda}(\gamma^2) J_{m+\lambda+1+2k}(\gamma x) \end{cases} \\
 \lim_{x \rightarrow 0} HS_n^{(1),\lambda,m}(x,\gamma^2) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\gamma^\lambda A_n^{\lambda,-m+1-2\lambda}(\gamma^2)} \begin{cases} \text{Si } n-m \text{ pair} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2-1)^{\frac{m}{2}}}{x^{m+\lambda}} d_{n,-k_0}^{\lambda,-m+1-2\lambda}(\gamma^2) J_{m+\lambda}(\gamma x) \\ \text{Si } n-m \text{ impair} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2-1)^{\frac{m}{2}}}{x^{m+\lambda}} d_{n,-k_0}^{\lambda,-m+1-2\lambda}(\gamma^2) J_{m+\lambda+1}(\gamma x) \end{cases} \quad \begin{cases} J_{m+\lambda}(\gamma x) \approx \frac{1}{\Gamma(m+\lambda+1)} \left(\frac{\gamma x}{2}\right)^{m+\lambda} \\ J_{m+\lambda+1}(\gamma x) \approx \frac{1}{\Gamma(m+\lambda+2)} \left(\frac{\gamma x}{2}\right)^{m+\lambda+1} \end{cases} \\
 \lim_{x \rightarrow 0} HS_n^{(1),\lambda,m}(x,\gamma^2) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\gamma^\lambda A_n^{\lambda,-m+1-2\lambda}(\gamma^2)} \begin{cases} \text{Si } n-m \text{ pair} & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{\lambda+m} (x^2-1)^{\frac{m}{2}} \frac{d_{n,-k_0}^{\lambda,-m+1-2\lambda}(\gamma^2)}{\Gamma(m+\lambda+1)} \\ \text{Si } n-m \text{ impair} & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{\lambda+m+1} x (x^2-1)^{\frac{m}{2}} \frac{d_{n,-k_0}^{\lambda,-m+1-2\lambda}(\gamma^2)}{\Gamma(m+\lambda+2)} \end{cases} \\
 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} HS_n^{(1),\lambda,m}(x,\gamma^2) &= \begin{cases} \text{Si } n-m \text{ pair} & \frac{\sqrt{\pi} \gamma^m e^{\frac{i m \pi}{2}}}{2^{\frac{m+\lambda+1}{2}} A_n^{\lambda,-m+1-2\lambda}(\gamma^2)} \frac{d_{n,-k_0}^{\lambda,-m+1-2\lambda}(\gamma^2)}{\Gamma(m+\lambda+1)} \\ \text{Si } n-m \text{ impair} & 0 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{dHS_n^{(1),\lambda,m}(x,\gamma^2)}{dx} = \begin{cases} \text{Si } n-m \text{ pair} & 0 \\ \text{Si } n-m \text{ impair} & \frac{\sqrt{\pi} \gamma^{m+1} e^{\frac{i m \pi}{2}}}{2^{\frac{m+\lambda+3}{2}} A_n^{\lambda,-m+1-2\lambda}(\gamma^2)} \frac{d_{n,-k_0}^{\lambda,-m+1-2\lambda}(\gamma^2)}{\Gamma(m+\lambda+2)} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{m+1} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Appliquons maintenant la proportionnalité en $x=0$ sur les fonctions ou leurs dérivées premières :

$$\begin{aligned}
 HS_n^{(1),\lambda,m}(x,\gamma^2) &= K_n^{(1),\lambda,m}(\gamma^2) HPS_n^{\lambda,m}(x,\gamma^2) \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } n-m \text{ pair} & K_n^{(1),\lambda,m}(\gamma^2) = e^{-\frac{i m \pi}{2}} \frac{HS_n^{(1),\lambda,m}(0,\gamma^2)}{hps_n^{\lambda,m}(0,\gamma^2)} \leftarrow HPS_n^{\lambda,m}(0,\gamma^2) = e^{\frac{i m \pi}{2}} hps_n^{\lambda,m}(0,\gamma^2) \\ \text{Si } n-m \text{ impair} & K_n^{(1),\lambda,m}(\gamma^2) = e^{-\frac{i m \pi}{2}} \frac{\frac{dHS_n^{(1),\lambda,m}(z,\gamma^2)}{dz} \Big|_{z=0}}{\frac{dhps_n^{\lambda,m}(z,\gamma^2)}{dz} \Big|_{z=0}} \leftarrow \frac{dPS_n^m(x,\gamma^2)}{dx} \Big|_{x=0} = e^{\frac{i m \pi}{2}} \frac{dhps_n^{\lambda,m}(x,\gamma^2)}{dx} \Big|_{x=0} \end{cases} \\
 \Rightarrow K_n^{(1),\lambda,m}(\gamma^2) &= \begin{cases} \text{Si } n-m \text{ pair} & \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{\lambda+1}{2}}} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^m \frac{d_{n,-k_0}^{\lambda,-m+1-2\lambda}(\gamma^2)}{\Gamma(m+\lambda+1) A_n^{\lambda,-m+1-2\lambda}(\gamma^2) hps_n^{\lambda,m}(0,\gamma^2)} \\ \text{Si } n-m \text{ impair} & \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{\lambda+1}{2}}} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{m+1} \frac{d_{n,-k_0}^{\lambda,-m+1-2\lambda}(\gamma^2)}{\Gamma(m+\lambda+2) A_n^{\lambda,-m+1-2\lambda}(\gamma^2) \frac{dhps_n^{\lambda,m}(z,\gamma^2)}{dz} \Big|_{z=0}} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Facteur de normalisation radial des fonctions d'onde hyper-sphéroïdales

Dans le cas des degrés et ordre entier et λ demi-entier, nous avons introduit le facteur de normalisation de la fonction radiale, sous la forme d'une somme unilatérale de coefficient du développement :

$$A_n^{\lambda, -m+1-2\lambda}(\gamma^2) = \sum_{2k \geq m-n} (-1)^k d_{n,k}^{-m}(\gamma^2) = \sum_{k=-\left\lfloor \frac{n-m}{2} \right\rfloor}^{+\infty} (-1)^k d_{n,k}^{\lambda, -m+1-2\lambda}(\gamma^2) = \sum_{k=-\frac{n-m-\delta}{2}}^{+\infty} (-1)^k d_{n,k}^{\lambda, -m+1-2\lambda}(\gamma^2) \quad \delta = (n-m) \bmod 2$$

$$A_n^{\lambda, m}(\gamma^2) = \sum_{2k \geq -m+1-2\lambda-n} (-1)^k d_{n,k}^m(\gamma^2) = \sum_{k=-\left\lfloor \frac{n+m+2\lambda-1}{2} \right\rfloor}^{+\infty} (-1)^k d_{n,k}^{\lambda, m}(\gamma^2) = \sum_{k=-\frac{n+m+2\lambda-1-\delta}{2}}^{+\infty} (-1)^k d_{n,k}^{\lambda, m}(\gamma^2) \quad \delta = (n+m+2\lambda-1) \bmod 2 = (n-m) \bmod 2$$

Dans le cas des degré et ordre non-entier, alors les sommations sur l'index sont bilatérales, et le facteur de normalisation radiale s'écrit :

$$A_v^{\lambda, -\mu+1-2\lambda}(\gamma^2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k d_{v,k}^{\lambda, -\mu+1-2\lambda}(\gamma^2) \quad A_v^{\lambda, \mu}(\gamma^2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k d_{v,k}^{\lambda, \mu}(\gamma^2)$$

Wronskien des solutions radiales et angulaires

Tout d'abord d'après la forme de l'équation différentielle des ondes sphéroïdales, tout Wronskien de deux solutions indépendantes de l'équation différentielle est proportionnelle à une puissance de $1/(1-z^2)$. Ensuite, à l'aide des formules asymptotiques en z pour les fonctions radiales, il est facile de démontrer que le Wronskien des fonctions radiales est :

$$\text{Wronskien} \{HS_v^{(1),\lambda,\mu}(x, \gamma^2), S_v^{(2),\lambda,\mu}(x, \gamma^2)\} = \frac{1}{\gamma^{2\lambda}(x^2 - 1)^{\frac{2\lambda+1}{2}}}$$

A l'aide des facteurs de jointure introduits précédemment dans les deux formules suivantes :

$$\begin{cases} HS_v^{(1),\lambda,\mu}(x, \gamma^2) = K_v^{(1),\lambda,\mu}(\gamma^2) \frac{\sin((\mu - \nu)\pi)}{\pi \sin(\lambda \pi)} e^{-i(\mu + \nu)\pi} e^{-i\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\pi} HQS_{-v-2\lambda}^{\lambda,\mu}(x, \gamma^2) \\ HS_{-v-2\lambda}^{(1),\lambda,\mu}(x, \gamma^2) = -e^{-i\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\pi} e^{i\nu\pi} K_v^{(2),\lambda,\mu}(\gamma^2) HQS_v^{\lambda,\mu}(x, \gamma^2) \end{cases}$$

On peut calculer les Wronskiens pour toutes valeurs du degré et de l'ordre :

$$\text{Wronskien} \{HS_v^{(1),\lambda,\mu}(x, \gamma^2), S_v^{(2),\lambda,\mu}(x, \gamma^2)\} = \frac{1}{\gamma^{2\lambda}(x^2 - 1)^{\frac{2\lambda+1}{2}}}$$

$$\begin{cases} HS_v^{(1),\lambda,\mu}(x, \gamma^2) = K_v^{(1),\lambda,\mu}(\gamma^2) \frac{\sin((\mu - \nu)\pi)}{\pi \sin(\lambda \pi)} e^{-i(\mu + \nu)\pi} e^{-i\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\pi} HQS_{-v-2\lambda}^{\lambda,\mu}(x, \gamma^2) \\ K_v^{(2),\lambda,\mu}(\gamma^2) = \frac{e^{-i(\mu+1)\pi} 2^{2\lambda-1} \sin(\lambda \pi)}{K_v^{(1),\lambda,\mu}(\gamma^2) A_v^{\lambda,\mu}(\gamma^2) A_v^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2)} \left(\frac{\Gamma(\lambda)}{\gamma^\lambda \sqrt{\pi}} \right)^2 \frac{\Gamma(\nu - \mu + 1)}{\Gamma(\nu + \mu + 2\lambda)} \\ K_v^{(1),\lambda,\mu}(\gamma^2) K_v^{(2),\lambda,\mu}(\gamma^2) = \frac{e^{-i(\mu+1)\pi} 2^{2\lambda-1} \sin(\lambda \pi)}{A_v^{\lambda,\mu}(\gamma^2) A_v^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2)} \left(\frac{\Gamma(\lambda)}{\gamma^\lambda \sqrt{\pi}} \right)^2 \frac{\Gamma(\nu - \mu + 1)}{\Gamma(\nu + \mu + 2\lambda)} \\ HS_{-v-2\lambda}^{(1),\lambda,\mu}(x, \gamma^2) = e^{-i\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\pi} e^{i(\nu+1)\pi} K_v^{(2),\lambda,\mu}(\gamma^2) HQS_v^{\lambda,\mu}(x, \gamma^2) \end{cases}$$

$$HQS_{-v-2\lambda}^{\lambda,\mu}(x, \gamma^2) = \frac{\pi e^{i\left(\lambda + \mu - \frac{1}{2}\right)\pi} \sin((\lambda + \nu)\pi) HPS_v^{\lambda,m}(x, \gamma^2) - \sin(\pi(\mu + \nu)) HQS_v^{\lambda,\mu}(x, \gamma^2)}{\sin(\pi(\mu - \nu))}$$

$$HS_{-v-2\lambda}^{(1),\lambda,\mu}(x, \gamma^2) = \cos(\pi(\nu + \lambda)) HS_v^{(1),\lambda,\mu}(x, \gamma^2) - \sin(\pi(\nu + \lambda)) HS_v^{(2),\lambda,\mu}(x, \gamma^2)$$

$$\Rightarrow \text{Wronskien} \{HS_v^{(1),\lambda,\mu}(x, \gamma^2), HS_{-v-2\lambda}^{(1),\lambda,\mu}(x, \gamma^2)\} = -\frac{\sin(\pi(\nu + \lambda))}{\gamma^{2\lambda}(x^2 - 1)^{\frac{2\lambda+1}{2}}}$$

$$\text{Wronskien} \{HQS_{-v-2\lambda}^{\lambda,\mu}(x, \gamma^2), HQS_v^{\lambda,\mu}(x, \gamma^2)\} = -\frac{\Gamma(\nu + \mu + 2\lambda)}{\Gamma(\nu - \mu + 1)} e^{2i\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\pi} 2^{1-2\lambda} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} \right)^2 \frac{\pi e^{2i\mu\pi} A_v^{\lambda,\mu}(\gamma^2) A_v^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2) \sin(\pi(\nu + \lambda))}{\sin((\mu - \nu)\pi) (x^2 - 1)^{\frac{2\lambda+1}{2}}}$$

$$\Rightarrow \text{Wronskien} \{HPS_v^{\lambda,m}(x, \gamma^2), HQS_v^{\lambda,\mu}(x, \gamma^2)\} = -\frac{\Gamma(\nu + \mu + 2\lambda)}{\Gamma(\nu - \mu + 1)} e^{i\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\pi} 2^{1-2\lambda} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} \right)^2 \frac{e^{i\mu\pi} A_v^{\lambda,\mu}(\gamma^2) A_v^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(\gamma^2)}{(x^2 - 1)^{\frac{2\lambda+1}{2}}}$$

Finalement le Wronskien des fonctions angulaires hps et hqs , à l'aide des formules de connexion :

$$\lambda, \nu \in \mathbf{R} \quad \mu \in \mathbf{N} \quad \text{ou} \quad \nu, \mu \in \mathbf{R} \quad \lambda = \frac{2p+1}{2} \quad p \in \mathbf{N}$$

$$\rightarrow \begin{cases} HPS_{\nu}^{\lambda, \mu}(x, \gamma^2) = \frac{(1-x)^{\frac{\mu}{2}}}{(x-1)^{\frac{\mu}{2}}} hps_{\nu}^{\lambda, \mu}(x, \gamma^2) \\ HQS_{\nu}^{\lambda, \mu}(x, \gamma^2) = e^{i\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\pi} e^{i\mu\pi} \frac{(x-1)^{\frac{1-2\lambda+\mu}{2}}}{(1-x)^{\frac{1-2\lambda+\mu}{2}}} hqs_{\nu}^{\lambda, \mu}(x, \gamma^2) + C \times hps_{\nu}^{\lambda, \mu}(x, \gamma^2) \end{cases}$$

Il vient :

$$Wronskien \{HPS_{\nu}^{\lambda, \mu}(x, \gamma^2), HQS_{\nu}^{\lambda, \mu}(x, \gamma^2)\} = \frac{\Gamma(\nu + \mu + 2\lambda)}{\Gamma(\nu - \mu + 1)} e^{i\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\pi} 2^{1-2\lambda} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\right)^2 \frac{e^{i(\mu+1)\pi} A_{\nu}^{\lambda, \mu}(\gamma^2) A_{\nu}^{\lambda, -\mu+1-2\lambda}(\gamma^2)}{(x^2 - 1)^{\frac{2\lambda+1}{2}}}$$

$$Wronskien \{hps_{\nu}^{\lambda, \mu}(x, \gamma^2), hqs_{\nu}^{\lambda, \mu}(x, \gamma^2)\} = \frac{\Gamma(\nu + \mu + 2\lambda)}{\Gamma(\nu - \mu + 1)} 2^{1-2\lambda} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\right)^2 \frac{A_{\nu}^{\lambda, \mu}(\gamma^2) A_{\nu}^{\lambda, -\mu+1-2\lambda}(\gamma^2)}{(1-x^2)^{\frac{2\lambda+1}{2}}}$$

Solutions exactes de l'équation différentielle des ondes hyper-sphéroïdales pour $\mu+\lambda=3/2$ et $\mu+\lambda=-1/2$

Modifions l'équation différentielle de la manière suivante, et trouvons deux solutions exactes de l'équation hyper-sphéroïdale :

$$(1-x^2)\frac{d^2y(x)}{dx^2} - (2\lambda+1)x\frac{dy(x)}{dx} + \left(\omega + \gamma^2(1-x^2) - \frac{\mu(\mu+2\lambda-1)}{1-x^2}\right)y(x) = 0$$

$$y(x) = (1-x^2)^\beta u(x) \Rightarrow (1-x^2)\frac{d^2u(x)}{dx^2} - (1+4\beta+2\lambda)x\frac{du(x)}{dx} + \left(\omega + \gamma^2(1-x^2) - \frac{\mu(\mu+2\lambda-1)+2\beta-4x^2\beta(\beta+\lambda)}{1-x^2}\right)u(x) = 0$$

$$\begin{cases} \beta = -\frac{2\lambda+1}{4} \\ \lambda = \tilde{\lambda} + \frac{1}{2} \quad \tilde{\lambda} = \lambda - \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow (1-x^2)\frac{d^2u(x)}{dx^2} + \left(\omega + \gamma^2(1-x^2) - \frac{\mu(\mu+2\tilde{\lambda}) - (1+\tilde{\lambda})(1-x^2\tilde{\lambda})}{1-x^2}\right)u(x)$$

Simplification $\mu(\mu+2\tilde{\lambda}) - (1+\tilde{\lambda})(1-x^2\tilde{\lambda}) = (1-x^2) \Rightarrow \begin{cases} \mu(\mu+2\tilde{\lambda}) - (1+\tilde{\lambda}) = \alpha \\ \tilde{\lambda}(1+\tilde{\lambda}) = -\alpha \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \mu(\mu+2\tilde{\lambda}) - (1+\tilde{\lambda}) + \tilde{\lambda}(1+\tilde{\lambda}) = 0 \Leftrightarrow \mu(\mu+2\tilde{\lambda}) + \tilde{\lambda}^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (\tilde{\lambda} + \mu + 1)(\tilde{\lambda} + \mu - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (1-x^2)\frac{d^2u(x)}{dx^2} + (\omega + \gamma^2(1-x^2) - \alpha)$$

Simplification $\omega = \alpha = -\tilde{\lambda}(1+\tilde{\lambda}) \Rightarrow \frac{d^2u(x)}{dx^2} + \gamma^2u(x) = 0$

$$(1) \begin{cases} \tilde{\lambda} + \mu + 1 = 0 \Rightarrow \mu = -\frac{1}{2} - \lambda \Rightarrow \omega = \alpha = \frac{1}{4} - \lambda^2 \\ \Rightarrow y(x) = (1-x^2)^{\frac{2\lambda+1}{4}} (A \sin(\gamma x) + B \cos(\gamma x)) \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \tilde{\lambda} + \mu - 1 = 0 \Rightarrow \mu = \frac{3}{2} - \lambda \Rightarrow \omega = \alpha = \frac{1}{4} - \lambda^2 \\ \Rightarrow y(x) = (1-x^2)^{\frac{2\lambda+1}{4}} (A \sin(\gamma x) + B \cos(\gamma x)) \end{cases}$$

On a vu que ces solutions correspondent effectivement aux cas où la valeur propre est déterminée

par la résolution d'un système matriciel réduit à un scalaire : $\omega = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)\left(\frac{1}{2} + \lambda\right)$.

On retrouve les solutions pour le cas $\lambda=1/2$:

$$(1) \quad \mu = -1 \Rightarrow \omega = \alpha = 0 \Rightarrow y(x) = \frac{A \sin(\gamma x) + B \cos(\gamma x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(2) \quad \mu = 1 \Rightarrow \omega = \alpha = 0 \Rightarrow y(x) = \frac{A \sin(\gamma x) + B \cos(\gamma x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

Pour $\lambda=1$, il vient :

$$(1) \quad \mu = -\frac{3}{2} \Rightarrow \omega = \alpha = -\frac{3}{4} \Rightarrow y(x) = \frac{A \sin(\gamma x) + B \cos(\gamma x)}{(1-x^2)^{\frac{3}{4}}}$$

$$(2) \quad \mu = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega = \alpha = -\frac{3}{4} \Rightarrow y(x) = \frac{A \sin(\gamma x) + B \cos(\gamma x)}{(1-x^2)^{\frac{3}{4}}}$$

Pour $\lambda=3/2$, il vient :

$$(1) \quad \mu = -2 \Rightarrow \omega = \alpha = -2 \Rightarrow y(x) = \frac{A \sin(\gamma x) + B \cos(\gamma x)}{1-x^2}$$

$$(2) \quad \mu = 0 \Rightarrow \omega = \alpha = -2 \Rightarrow y(x) = \frac{A \sin(\gamma x) + B \cos(\gamma x)}{1-x^2}$$

$$(1) \quad \mu = -\frac{5}{2} \Rightarrow \omega = \alpha = -\frac{15}{4} \Rightarrow y(x) = \frac{A \sin(\gamma x) + B \cos(\gamma x)}{(1-x^2)^{\frac{5}{4}}}$$

Pour $\lambda=2$, il vient :

$$(2) \quad \mu = 0 \Rightarrow \omega = \alpha = -\frac{15}{4} \Rightarrow y(x) = \frac{A \sin(\gamma x) + B \cos(\gamma x)}{(1-x^2)^{\frac{5}{4}}}$$

$$(1) \quad \mu = -3 \Rightarrow \omega = \alpha = -6 \Rightarrow y(x) = \frac{A \sin(\gamma x) + B \cos(\gamma x)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Pour $\lambda=5/2$, il vient :

$$(2) \quad \mu = -1 \Rightarrow \omega = \alpha = -6 \Rightarrow y(x) = \frac{A \sin(\gamma x) + B \cos(\gamma x)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Comme dans le cas des fonctions sphéroïdales, il n'est pas facile de construire les fonctions d'ondes sphéroïdales liés aux valeurs propres ω solution d'un système matriciel fini de dimension supérieure.

Les solutions exactes pour $\mu + \lambda = \frac{3}{2}$

Selon les propriétés de parité des fonctions hps et hqs, de finitude sur l'intervalle de $[-1, +1]$, et notamment en $x=+1$ et $x=-1$, cela impose que $\sin(\pm \gamma) = 0$ ou $\cos(\gamma) = 0$. On a donc :

$$\text{Comme } \int_{-1}^{+1} dx \left(hps_n^{\lambda, \mu}(x, \gamma^2) \right)^2 = 2^{1-2\lambda} \frac{2}{2\lambda + 2n} \frac{\pi}{(\Gamma(\lambda))^2} \frac{\Gamma(n + \mu + 2\lambda)}{\Gamma(n - \mu + 1)}$$

$$\mu + \lambda = \frac{3}{2} \Rightarrow \int_{-1}^{+1} dx \left(hps_n^{\lambda, \frac{3}{2}-\lambda}(x, \gamma^2) \right)^2 = 2^{1-2\lambda} \frac{2}{2\lambda + 2n} \frac{\pi}{(\Gamma(\lambda))^2} \frac{\Gamma\left(n + \lambda + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(n + \lambda - \frac{1}{2}\right)} = \frac{2^{1-2\lambda}}{n + \lambda} \frac{\pi}{(\Gamma(\lambda))^2} \left(n + \lambda + \frac{1}{2}\right) \left(n + \lambda - \frac{1}{2}\right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_n = \frac{n\pi}{2} \quad \frac{1}{(\omega_n^s)^2} = \frac{2(2n+2\lambda)(\Gamma(\lambda))^2}{2^{1-2\lambda} \pi (2n+2\lambda+1)(2n+2\lambda-1)} \int_{-1}^{+1} dx \frac{\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}x\right)}{(1-x^2)^{\frac{2\lambda+1}{2}}} \quad \frac{1}{(\omega_n^c)^2} = \frac{2(2n+2\lambda)(\Gamma(\lambda))^2}{2^{1-2\lambda} \pi (2n+2\lambda+1)(2n+2\lambda-1)} \int_{-1}^{+1} dx \frac{\cos^2\left(\frac{n\pi}{2}x\right)}{(1-x^2)^{\frac{2\lambda+1}{2}}} \\ hps_n^{\lambda, \frac{3}{2}-\lambda}(x, \gamma^2) = \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{2\lambda+1}{4}}} \begin{cases} \omega_n^s(-1)^{\frac{n}{2}} \sin(\gamma_n x) = \omega_n^s \sin(\gamma_n(x-1)) & n \text{ pair} \leftarrow n-1 \text{ impair} \\ \omega_n^c(-1)^{\frac{n+1}{2}} \cos(\gamma_n x) = \omega_n^c \sin(\gamma_n(x-1)) & n \text{ impair} \leftarrow n-1 \text{ pair} \end{cases} \\ hqs_n^{\lambda, \frac{3}{2}-\lambda}(x, \gamma^2) = \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{2\lambda+1}{4}}} \begin{cases} \omega_n^s(-1)^{\frac{n+2}{2}} \cos(\gamma_n x) = -\omega_n^s \cos(\gamma_n(x-1)) & n \text{ pair} \leftarrow n-1 \text{ impair} \\ \omega_n^c(-1)^{\frac{n+1}{2}} \sin(\gamma_n x) = -\omega_n^c \cos(\gamma_n(x-1)) & n \text{ impair} \leftarrow n-1 \text{ pair} \end{cases} \end{array} \right.$$

Les fonctions HPS et HQS peuvent se définir à partir des formules de connexion établies pour la valeur $\mu + \lambda = 3/2$ quelque soit l'argument z complexe en dehors des coupures respectives des fonctions de type 1 et 2. Selon la construction des fonctions hyper-sphéroïdales, cela implique que

$$\lambda \text{ soit un demi-entier et } \mu \text{ un entier : } \mu + \lambda = \frac{3}{2} \quad \lambda = \frac{2p+1}{2} \quad p \in \mathbb{N} \rightarrow \mu \in \mathbb{N}.$$

Les formules de connexions se présentent comme suit :

$$\forall \mathbf{R} \quad \mu \in \mathbf{N} \rightarrow HPS_n^{\lambda, \frac{3}{2}-\lambda}(z) = \frac{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}{(z-1)^{\frac{\mu}{2}}} hps_n^{\lambda, \frac{3}{2}-\lambda}(z) \quad HQS_n^{\lambda, \frac{3}{2}-\lambda}(z) = \frac{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}{(z-1)^{\frac{\mu}{2}}} \left(hqs_n^{\lambda, \frac{3}{2}-\lambda}(z) + \frac{\pi \sqrt{1-z}}{2 \sqrt{z-1}} hps_n^{\lambda, \frac{3}{2}-\lambda}(z) \right)$$

Mais ces formules sont valables pour une construction à l'aide de fonctions de Gegenbauer associées et aboutissent à des fonctions à valeur complexe. Or ici la construction des solutions exactes est différente et surtout directe, on peut donc proposer une formule de connexion simplifiée en éliminant la partie purement imaginaire :

$$HPS_n^{\lambda, \frac{3}{2}-\lambda}(z) = \frac{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}{(z-1)^{\frac{\mu}{2}}} hps_n^{\lambda, \frac{3}{2}-\lambda}(z) \quad HQS_n^{\lambda, \frac{3}{2}-\lambda}(z) = \frac{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}{(z-1)^{\frac{\mu}{2}}} hqs_n^{\lambda, \frac{3}{2}-\lambda}(z)$$

Les fonctions HPS et HQS pour $x > 1$ sont donc les suivantes :

$$\gamma_n = \frac{n\pi}{2} \rightarrow \begin{cases} HPS_n^{\lambda, \frac{3}{2}-\lambda}(x, \gamma_n^2) = \frac{1}{(x^2-1)^{\frac{2\lambda+1}{4}}} \begin{cases} \omega_n^s \sin(\gamma_n(x-1)) & n \text{ pair} \\ \omega_n^c \sin(\gamma_n(x-1)) & n \text{ impair} \end{cases} \\ HQS_n^{\lambda, \frac{3}{2}-\lambda}(x, \gamma_n^2) = -\frac{1}{(x^2-1)^{\frac{2\lambda+1}{4}}} \begin{cases} \omega_n^s \cos(\gamma_n(x-1)) & n \text{ pair} \\ \omega_n^c \cos(\gamma_n(x-1)) & n \text{ impair} \end{cases} \end{cases}$$

Pour ce qui est des fonctions radiales, la condition de normalisation à l'infini est la suivante :

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \rightarrow \infty} HS_n^{(1), \lambda, \frac{3}{2}-\lambda}(x, \gamma^2) &\approx (\gamma x)^{-\lambda-\frac{1}{2}} \sin\left(\gamma x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi(2\lambda-1)}{4}\right) \\ \lim_{\gamma \rightarrow \infty} HS_n^{(2), \lambda, \frac{3}{2}-\lambda}(x, \gamma^2) &\approx -(\gamma x)^{-\lambda-\frac{1}{2}} \cos\left(\gamma x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi(2\lambda-1)}{4}\right) \end{aligned}$$

Or les fonctions sinus et cosinus de la condition de normalisation sont des combinaisons linéaires des fonctions solutions obtenues plus haut. Les fonctions radiales sont donc des fonctions comportant un déphasage et respectant la normalisation à l'infini :

$$\gamma_n = \frac{n\pi}{2} \rightarrow \begin{cases} HS_n^{(1), \lambda, \frac{3}{2}-\lambda}(x, \gamma_n^2) = \frac{1}{(x^2-1)^{\frac{2\lambda+1}{4}}} \frac{\sin\left(\gamma_n(x-1) - \frac{\pi(2\lambda-1)}{4}\right)}{\gamma_n^{\frac{2\lambda+1}{2}}} \\ HS_n^{(2), \lambda, \frac{3}{2}-\lambda}(x, \gamma_n^2) = -\frac{1}{(x^2-1)^{\frac{2\lambda+1}{4}}} \frac{\cos\left(\gamma_n(x-1) - \frac{\pi(2\lambda-1)}{4}\right)}{\gamma_n^{\frac{2\lambda+1}{2}}} \end{cases}$$

Comme λ est demi-entier, il vient :

$$\begin{cases} \gamma_n = \frac{n\pi}{2} \\ \lambda = \frac{2p+1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} HS_n^{(1)\lambda, \frac{3}{2}-\lambda}(x, \gamma_n^2) = \frac{1}{(x^2-1)^{\frac{2\lambda+1}{4}}} \frac{\sin\left(\gamma_n(x-1) - \frac{p\pi}{2}\right)}{\gamma_n^{\frac{2\lambda+1}{2}}} \\ HS_n^{(2)\lambda, \frac{3}{2}-\lambda}(x, \gamma_n^2) = -\frac{1}{(x^2-1)^{\frac{2\lambda+1}{4}}} \frac{\cos\left(\gamma_n(x-1) - \frac{p\pi}{2}\right)}{\gamma_n^{\frac{2\lambda+1}{2}}} \end{cases}$$

Le Wronskien de ces deux dernières solutions est donc le suivant :

$$\left\{ HS_n^{(1)\lambda, \frac{3}{2}-\lambda}(x, \gamma_n^2), HS_n^{(2)\lambda, \frac{3}{2}-\lambda}(x, \gamma_n^2) \right\} = \frac{1}{\gamma_n^{2\lambda-1} (x^2-1)^{\frac{2\lambda+1}{2}}}$$

Cela correspond à la valeur usuelle du Wronskien des fonctions radiales.

Les deux constantes de normalisation sont liées aux intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} \gamma_n = \frac{n\pi}{2} \quad n = 2p \quad \frac{1}{(\omega_n^s)^2} &= \frac{(n+\lambda)(\Gamma(\lambda))^2}{2^{1-2\lambda} \pi \left(n+\lambda+\frac{1}{2}\right) \left(n+\lambda-\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^{+1} dx \frac{\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}x\right)}{(1-x^2)^{\frac{2\lambda+1}{2}}} \rightarrow I_s = \int_{-1}^{+1} dx \frac{\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}x\right)}{(1-x^2)^{\frac{2\lambda+1}{2}}} \\ \gamma_n = \frac{n\pi}{2} \quad n = 2p+1 \quad \frac{1}{(\omega_n^c)^2} &= \frac{(n+\lambda)(\Gamma(\lambda))^2}{2^{1-2\lambda} \pi \left(n+\lambda+\frac{1}{2}\right) \left(n+\lambda-\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^{+1} dx \frac{\cos^2\left(\frac{n\pi}{2}x\right)}{(1-x^2)^{\frac{2\lambda+1}{2}}} \rightarrow I_c = \int_{-1}^{+1} dx \frac{\cos^2\left(\frac{n\pi}{2}x\right)}{(1-x^2)^{\frac{2\lambda+1}{2}}} \end{aligned}$$

Parmi les intégrales à calculer commençons par les suivantes déjà calculées avec les solutions exacte de l'équation des ondes sphéroïdales :

$$\int_{-1}^{+1} dx \frac{\sin^2(\gamma x)}{1-x^2} = \frac{1}{2} \left(\int_0^{+1} dx \frac{1-\cos(2\gamma x)}{1-x} + \int_0^{+1} dx \frac{1-\cos(2\gamma x)}{1+x} \right) \quad \gamma = \frac{n\pi}{2} \quad n=2p \quad p \in \mathbf{N} \quad 2\gamma = 2p\pi$$

$$t = 2\gamma(1-x) \quad \int_0^{+1} dx \frac{1-\cos(2\gamma x)}{1-x} = \int_0^{2\gamma} dt \frac{1-\cos(t)}{t}$$

$$t = 2\gamma(1+x) \quad \int_0^{+1} dx \frac{1-\cos(2\gamma x)}{1+x} = \int_0^{4\gamma} dt \frac{1-\cos(t)}{t} - \int_0^{2\gamma} dt \frac{1-\cos(t)}{t}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{+1} dx \frac{\sin^2(\gamma x)}{1-x^2} = \frac{1}{2} \int_0^{4\gamma} dt \frac{1-\cos(t)}{t} \rightarrow n \text{ pair} \quad \int_{-1}^{+1} dx \frac{\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}x\right)}{1-x^2} = \frac{1}{2} \left(\gamma \text{Euler} + \text{Log}(2n\pi) + \int_{2n\pi}^{+\infty} dt \frac{\cos(t)}{t} \right)$$

De même on obtient : $n \text{ impair} \quad \int_{-1}^{+1} dx \frac{\cos^2\left(\frac{n\pi}{2}x\right)}{1-x^2} = \frac{1}{2} \left(\gamma \text{Euler} + \text{Log}(2n\pi) + \int_{2n\pi}^{+\infty} dt \frac{\cos(t)}{t} \right)$

Puis les suivantes :

$$\int_{-1}^{+1} dx \frac{\sin^2(\gamma x)}{(1-x^2)^2} = \int_0^{+1} dx \frac{1-\cos(2\gamma x)}{(1-x^2)^2} = \frac{1}{4} \left(\int_0^{+1} dx \frac{1-\cos(2\gamma x)}{(1-x)^2} + \int_0^{+1} dx \frac{1-\cos(2\gamma x)}{(1+x)^2} + \int_0^{+1} dx \frac{1-\cos(2\gamma x)}{1-x} + \int_0^{+1} dx \frac{1-\cos(2\gamma x)}{1+x} \right)$$

$$\gamma = \frac{n\pi}{2} \quad n=2p \quad p \in \mathbf{N} \quad 2\gamma = 2p\pi$$

$$t = 2\gamma(1-x) \quad \int_0^{+1} dx \frac{1-\cos(2\gamma x)}{1-x} = \int_0^{2\gamma} dt \frac{1-\cos(t)}{t} \quad \int_0^{+1} dx \frac{1-\cos(2\gamma x)}{(1-x)^2} = 2\gamma \int_0^{2\gamma} dt \frac{1-\cos(t)}{t^2}$$

$$t = 2\gamma(1+x) \quad \int_0^{+1} dx \frac{1-\cos(2\gamma x)}{1+x} = \int_0^{4\gamma} dt \frac{1-\cos(t)}{t} - \int_0^{2\gamma} dt \frac{1-\cos(t)}{t} \quad \int_0^{+1} dx \frac{1-\cos(2\gamma x)}{(1+x)^2} = 2\gamma \left\{ \int_0^{4\gamma} dt \frac{1-\cos(t)}{t^2} - \int_0^{2\gamma} dt \frac{1-\cos(t)}{t^2} \right\}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{+1} dx \frac{\sin^2(\gamma x)}{(1-x^2)^2} = \frac{1}{4} \left(2\gamma \int_0^{4\gamma} dt \frac{1-\cos(t)}{t^2} + \int_0^{4\gamma} dt \frac{1-\cos(t)}{t} \right)$$

Par intégration par partie $\int_0^x dt \frac{1-\cos(t)}{t^2} = \left[-\frac{1-\cos(t)}{t} \right]_0^x + \int_0^x dt \frac{\sin(t)}{t} = \frac{\cos(x)-1}{x} + \int_0^x dt \frac{\sin(t)}{t}$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{+1} dx \frac{\sin^2(\gamma x)}{(1-x^2)^2} = \frac{1}{4} \left(2\gamma \left\{ \frac{\cos(4\gamma)-1}{4\gamma} + \int_0^{4\gamma} dt \frac{\sin(t)}{t} \right\} + \int_0^{4\gamma} dt \frac{1-\cos(t)}{t} \right) = \frac{1}{4} \left(2\gamma \int_0^{4\gamma} dt \frac{\sin(t)}{t} + \int_0^{4\gamma} dt \frac{1-\cos(t)}{t} \right)$$

Or $\int_0^{4\gamma} dt \frac{1-\cos(t)}{t} = \gamma \text{Euler} + \text{Log}(4\gamma) + \int_{4\gamma}^{+\infty} dt \frac{\cos(t)}{t} \Rightarrow n \text{ pair} \quad \int_{-1}^{+1} dx \frac{\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}x\right)}{(1-x^2)^2} = \frac{1}{4} \left(\gamma \text{Euler} + \text{Log}(2n\pi) + 2\gamma \int_0^{2n\pi} dt \frac{\sin(t)}{t} + \int_{2n\pi}^{+\infty} dt \frac{\cos(t)}{t} \right)$

De même on obtient : $n \text{ impair} \quad \int_{-1}^{+1} dx \frac{\cos^2\left(\frac{n\pi}{2}x\right)}{(1-x^2)^2} = \frac{1}{4} \left(\gamma \text{Euler} + \text{Log}(2n\pi) + 2\gamma \int_0^{2n\pi} dt \frac{\sin(t)}{t} + \int_{2n\pi}^{+\infty} dt \frac{\cos(t)}{t} \right)$

Où l'on voit introduites les deux fonctions connues Sinus intégrale et Cosinus intégrale :

$$\text{CosInt}(x) = - \int_x^{+\infty} dt \frac{\cos(t)}{t} \quad \text{SinInt}(x) = \int_0^x dt \frac{\sin(t)}{t}$$

Solution exactes pour $\mu + \lambda = -\frac{1}{2}$ provenant de la transformation $\begin{cases} \mu + \lambda = \frac{3}{2} \\ \mu \rightarrow -\mu + 1 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow -\mu - \lambda = \frac{1}{2}$

Avec les propriétés de transformation du paramètre μ en $-\mu+1-2\lambda$, il vient :

$$\nu, \mu \in \mathbf{R} \quad \lambda = \frac{2p+1}{2} \quad p \in \mathbf{N} \quad \lambda + \mu = \frac{3}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} hps_{\nu}^{\lambda, -\frac{1}{2}-\lambda}(z) = -\frac{\Gamma\left(\nu + \lambda - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu + \lambda + \frac{3}{2}\right)} hps_{\nu}^{\lambda, \frac{3}{2}-\lambda}(z) = -\frac{4}{(2\nu + 2\lambda + 1)(2\nu + 2\lambda - 1)} hps_{\nu}^{\lambda, \frac{3}{2}-\lambda}(z) \\ hpq_{\nu}^{\lambda, -\frac{1}{2}-\lambda}(z) = -\frac{\Gamma\left(\nu + \lambda - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu + \lambda + \frac{3}{2}\right)} hpq_{\nu}^{\lambda, \mu}(z) = -\frac{4}{(2\nu + 2\lambda + 1)(2\nu + 2\lambda - 1)} hps_{\nu}^{\lambda, \frac{3}{2}-\lambda}(z) \end{array} \right.$$

Il vient immédiatement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_n = \frac{n\pi}{2} \quad \frac{1}{(\tilde{\omega}_n^s)^2} = \frac{(\Gamma(\lambda))^2}{2^{1-2\lambda}\pi} \frac{(2n+2\lambda-1)(2n+2\lambda)(2n+2\lambda+1)}{8} \int_{-1}^{+1} dx \frac{\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}x\right)}{(1-x^2)^{\frac{2\lambda+1}{2}}} \\ \frac{1}{(\tilde{\omega}_n^c)^2} = \frac{(\Gamma(\lambda))^2}{2^{1-2\lambda}\pi} \frac{(2n+2\lambda-1)(2n+2\lambda)(2n+2\lambda+1)}{8} \int_{-1}^{+1} dx \frac{\cos^2\left(\frac{n\pi}{2}x\right)}{(1-x^2)^{\frac{2\lambda+1}{2}}} \\ hps_n^{\lambda, -\frac{1}{2}-\lambda}(x, \gamma^2) = -\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{2\lambda+1}{4}}} \begin{cases} \tilde{\omega}_n^s \sin(\gamma_n(x-1)) & n \text{ pair} \leftarrow n-1 \text{ impair} \\ \tilde{\omega}_n^c \sin(\gamma_n(x-1)) & n \text{ impair} \leftarrow n-1 \text{ pair} \end{cases} \\ hqs_n^{\lambda, -\frac{1}{2}-\lambda}(x, \gamma^2) = \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{2\lambda+1}{4}}} \begin{cases} \tilde{\omega}_n^s \cos(\gamma_n(x-1)) & n \text{ pair} \leftarrow n-1 \text{ impair} \\ \tilde{\omega}_n^c \cos(\gamma_n(x-1)) & n \text{ impair} \leftarrow n-1 \text{ pair} \end{cases} \end{array} \right.$$

Les fonctions HPS et HQS sont les suivantes :

$$\gamma_n = \frac{n\pi}{2} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} HPS_n^{\lambda, -\frac{1}{2}-\lambda}(x, \gamma_n^2) = -\frac{1}{(x^2-1)^{\frac{2\lambda+1}{4}}} \begin{cases} \tilde{\omega}_n^s \sin(\gamma_n(x-1)) & n \text{ pair} \\ \tilde{\omega}_n^c \sin(\gamma_n(x-1)) & n \text{ impair} \end{cases} \\ HQS_n^{\lambda, -\frac{1}{2}-\lambda}(x, \gamma_n^2) = \frac{1}{(x^2-1)^{\frac{2\lambda+1}{4}}} \begin{cases} \tilde{\omega}_n^s \cos(\gamma_n(x-1)) & n \text{ pair} \\ \tilde{\omega}_n^c \cos(\gamma_n(x-1)) & n \text{ impair} \end{cases} \end{array} \right.$$

Les fonctions radiales sont les suivantes et respectent la normalisation à l'infini (elles sont identiques à celle pour le cas $\mu+\lambda=3/2$) :

$$\gamma_n = \frac{n\pi}{2} \rightarrow \begin{cases} HS_n^{(1),\lambda,-\frac{1}{2}-\lambda}(x,\gamma_n^2) = \frac{1}{(x^2-1)^{\frac{2\lambda+1}{4}}} \frac{\sin\left(\gamma_n(x-1) - \frac{\pi(2\lambda-1)}{4}\right)}{\gamma_n^{\frac{2\lambda+1}{2}}} \\ HS_n^{(2),\lambda,-\frac{1}{2}-\lambda}(x,\gamma_n^2) = -\frac{1}{(x^2-1)^{\frac{2\lambda+1}{4}}} \frac{\cos\left(\gamma_n(x-1) - \frac{\pi(2\lambda-1)}{4}\right)}{\gamma_n^{\frac{2\lambda+1}{2}}} \end{cases}$$

Comme λ est demi-entier, il vient :

$$\begin{cases} \gamma_n = \frac{n\pi}{2} \\ \lambda = \frac{2p+1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} HS_n^{(1),\lambda,-\frac{1}{2}-\lambda}(x,\gamma_n^2) = \frac{1}{(x^2-1)^{\frac{2\lambda+1}{4}}} \frac{\sin\left(\gamma_n(x-1) - \frac{p\pi}{2}\right)}{\gamma_n^{\frac{2\lambda+1}{2}}} \\ HS_n^{(2),\lambda,-\frac{1}{2}-\lambda}(x,\gamma_n^2) = -\frac{1}{(x^2-1)^{\frac{2\lambda+1}{4}}} \frac{\cos\left(\gamma_n(x-1) - \frac{p\pi}{2}\right)}{\gamma_n^{\frac{2\lambda+1}{2}}} \end{cases}$$

Construction des solutions exactes de l'équation différentielle des ondes hyper-sphéroïdales lorsque $\mu+\lambda-1/2$ est un entier supérieur à 1

On peut calquer l'approche de l'ouvrage de J.Meixner & F.W.Schafke « Sphaeroid_funktionen » dédié aux fonctions sphéroïdales n°3.534 page 274, il est écrit que les solutions sont de la forme :

Pour $m \in \mathbb{N}^+$ $y(x) = (x^2 - 1)^{\frac{m}{2}} e^{i\gamma x} P_{m-1}(x)$ pour $x > 1$. Où P est un polynôme de degré au plus $m-1$.

Fort de ce résultat, on peut proposer l'« anatz » suivant à intégrer dans l'équation différentielle des ondes hyper-sphéroïdales lorsque $x \in [-1, 1]$:

$$(1 - x^2) y''(x) - (2\lambda + 1) x y'(x) + \left(\omega + \gamma^2 (1 - x^2) - \frac{\mu(\mu + 2\lambda - 1)}{1 - x^2} \right) y(x) = 0$$

$$\text{Pour } m \in \mathbb{N}^+ \quad \mu + \lambda = m + \frac{1}{2} \quad y(x) = \frac{1}{(1 - x^2)^{\frac{\mu + 2\lambda - 1}{2}}} e^{i\gamma x} P_{m-1}(x) = (1 - x^2)^{-\frac{2\lambda - 1 + 2m}{4}} e^{i\gamma x} P_{m-1}(x)$$

$$P_{m-1}(x) = x^{m-1} + a_{m-2} x^{m-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

en fixant à chaque m , et déterminer les conditions de l'annulation des divers termes d'un polynôme résultant afin de connaître les termes dudit polynôme. Il vient pour $m=2$:

$$y(x) = (1 - x^2)^{-\frac{2\lambda + 3}{4}} e^{i\gamma x} \left\{ x + i \frac{4\lambda^2 - 1 + 4\omega}{8\gamma} \right\} \quad \text{tq} \quad 16\omega^2 + 8\omega(4\lambda^2 - 5) + 16\lambda^4 - 40\lambda^2 + 64\gamma^2 + 9 = 0$$

On retrouve les deux racines du polynôme déjà établi auparavant :

$$16\omega^2 + 8\omega(4\lambda^2 - 5) + 16\lambda^4 - 40\lambda^2 + 64\gamma^2 + 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \frac{5 - 4\lambda^2 - 4\sqrt{1 - 4\gamma^2}}{4} \\ \omega_2 = \frac{5 - 4\lambda^2 + 4\sqrt{1 - 4\gamma^2}}{4} \end{cases}$$

Et les solutions réelles sont à prendre parmi les parties réelle ou imaginaire de la fonction $y(x)$ ainsi construite par injection des seules racines réelles. Il vient pour $m=3$:

$$y(x) = (1 - x^2)^{-\frac{2\lambda + 5}{4}} e^{i\gamma x} \left\{ x^2 + i \frac{4\lambda^2 - 1 + 4\omega}{8\gamma} x + \frac{-9 - 128\gamma^2 + 40\lambda^2 - 16\lambda^4 + 40\omega - 32\lambda^2\omega - 16\omega^2}{128\gamma^2} \right\}$$

$$225 - 1036\lambda^2 + 560\lambda^4 - 64\lambda^6 - 256\gamma^2(-17 + 4\lambda^2) - 4(259 + 256\gamma^2 - 280\lambda^2 + 48\lambda^4)\omega + (560 - 192\lambda^2)\omega^2 - 64\omega^3 = 0$$

Il vient pour $m=4$:

$$y(x) = (1 - x^2)^{-\frac{2\lambda + 7}{4}} e^{i\gamma x} \left\{ x^2 + i \frac{4\lambda^2 - 1 + 4\omega}{8\gamma} x + \frac{-9 - 192\gamma^2 + 40\lambda^2 - 16\lambda^4 + 40\omega - 32\lambda^2\omega - 16\omega^2}{128\gamma^2} + \right.$$

$$\left. + i \frac{225 + 8128\gamma^2 - 1036\lambda^2 - 1792\gamma^2\lambda^2 + 560\lambda^4 - 64\lambda^6 - 1036\omega - 1792\gamma^2\omega + 1120\lambda^2\omega - 192\lambda^4\omega + 560\omega^2 - 192\lambda^2\omega^2 - 64\omega^3}{3072\gamma^3} \right\}$$

$$\left\{ \begin{aligned} &-11025 - 36864\gamma^4 + 51664\lambda^2 - 31584\lambda^4 + 5376\lambda^6 - 256\lambda^8 - 128\gamma^2(3149 - 1096\lambda^2 + 80\lambda^4) - \\ &-16(-3229 + 3948\lambda^2 - 1008\lambda^4 + 64\lambda^6 + 64\gamma^2(-137 + 20\lambda^2))\omega - \\ &-32(987 + 320\gamma^2 - 504\lambda^2 + 48\lambda^4)\omega^2 + \\ &+ 256(21 - 4\lambda^2)\omega^3 - \\ &-256\omega^4 = 0 \end{aligned} \right\}$$

La relation de récurrence sur l'« anatz » : $y(x) = (1-x^2)^{\frac{2\lambda-1+2m}{4}} e^{i\gamma x} P_{m-1}(x)$ est à 4 termes. Les valeurs propres λ racines du polynôme s'obtiennent en remplaçant dans l'équation différentielle hyper-sphéroïdale un polynôme de la forme : $a_0 + a_1x + a_2x^2$ pour ne retenir que le terme de degré 0 qui doit s'annuler, soit la condition sur les trois coefficients :

$$a_0 \left(\omega + \lambda^2 - \frac{1}{4} + m(1-m) \right) + 2(i\gamma a_1 + a_2) = 0$$

Ce qui constitue un polynôme de degré m en λ . En prenant le motif suivant intégré dans l'équation différentielle des ondes hyper-sphéroïdales :

$$a_l x^l + a_{l+1} x^{l+1} + a_{l+2} x^{l+2} + a_{l+3} x^{l+3} + a_{l+4} x^{l+4} + a_{l+5} x^{l+5}$$

Puis en recherchant le terme de puissance de x comportant 4 termes successifs, il y en a trois mais qui se déduisent l'un de l'autre par translation d'indice puis en annulant l'un des trois termes, on obtient la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} a_m = 0 & a_{m-1} = 1 & a_{m-2} = i \frac{4\omega + 4\lambda^2 - 1}{8\gamma} \\ \dots \\ -2i\gamma(l+1-m)a_l + \left(\lambda^2 - \frac{9}{4} - l^2 + 3m - m^2 + l(2m-3) - \lambda^2 + \omega \right) a_{l+1} + (l+2)(2i\gamma a_{l+2} + (l+3)a_{l+3}) = 0 \\ \dots \\ a_0 = a_0(\omega) \text{ polynôme de degré } m-1 \text{ en } \omega \\ a_1 = a_1(\omega) \text{ polynôme de degré } m-2 \text{ en } \omega \\ \dots \\ a_{m-2} = a_{m-2}(\omega) \text{ polynôme de degré } 1 \text{ en } \omega \\ a_{m-1} = 1 \end{cases} \Rightarrow a_0 \left(\omega + \lambda^2 - \frac{1}{4} + m(1-m) \right) + 2(i\gamma a_1 + a_2) = 0 \text{ polynôme de degré } m \text{ en } \omega$$

Pour l'exemple les premiers termes du développement s'écrivent :

$$y(x) = (1-x^2)^{\frac{2\lambda-1+2m}{4}} e^{i\gamma x} \left\{ \begin{aligned} & x^{m-1} + i \frac{4\omega + 4\lambda^2 - 1}{8\gamma} x^{m-2} - \left\{ \frac{m-1}{2} + \frac{(4\omega + 4\lambda^2 - 1)(4\omega + 4\lambda^2 - 9)}{128\gamma^2} \right\} x^{m-3} + \\ & + i \frac{\left\{ 64\gamma^2(-13 + 20\lambda^2 + m(3 + 8m - 12\lambda^2 - 12\omega) + 20\omega) \right\} - (4\omega + 4\lambda^2 - 1)(4\omega + 4\lambda^2 - 9)(4\omega + 4\lambda^2 - 25)}{3072\gamma^3} x^{m-4} + \\ & + \left\{ \frac{(m-1)(m-3)}{8} + \frac{-287 + 408(\lambda^2 + \omega) - 112(\lambda^2 + \omega)^2 - 16m^2(4\omega + 4\lambda^2 - 13) + 3m(4\omega + 4\lambda^2 - 1)(4\omega + 4\lambda^2 - 9)}{768\gamma^2} \right\} x^{m-5} + \\ & + \frac{(4\omega + 4\lambda^2 - 1)(4\omega + 4\lambda^2 - 9)(4\omega + 4\lambda^2 - 25)(4\omega + 4\lambda^2 - 49)}{98304\gamma^4} \\ & + \dots \end{aligned} \right\}$$

Solutions exactes régulières en $x=1$ et $x=-1$

Dans cette section on va supposer que le paramètre λ demi-entier est supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$.

Pour $m=1$: la solution s'écrit :

$$y(x) = y_1(x) + i y_2(x) \quad y_1(x) = \frac{\cos(\gamma x)}{(1-x^2)^{\frac{2\lambda+1}{4}}} \quad y_1(-x) = y_1(x) \quad y_2(x) = \frac{\sin(\gamma x)}{(1-x^2)^{\frac{2\lambda+1}{4}}} \quad y_2(-x) = -y_2(x)$$

$$\omega \quad / \quad P_1(\omega, \lambda, \gamma^2) = 4\omega + 4\lambda^2 - 1 = 0$$

La régularité des fonctions y_1 et y_2 est obtenue lorsque qu'elles sont finies toutes deux en $x=1$. Or ces deux fonctions présentent un développement suivant autour de $x=1$:

$$y_1(1) = 0 \Rightarrow \cos(\gamma) = 0 \Rightarrow y_1(x) \approx \frac{\gamma}{2^{\frac{2\lambda+1}{4}} (1-x)^{\frac{2\lambda-3}{4}}} \sin(\gamma)$$

$$y_2(1) = 0 \Rightarrow \sin(\gamma) = 0 \Rightarrow y_2(x) \approx \frac{\gamma}{2^{\frac{2\lambda+1}{4}} (1-x)^{\frac{2\lambda-3}{4}}} \cos(\gamma)$$

Il suffit donc que γ soit solution de l'une des équations transcendantales pour l'une des fonctions y_1 ou y_2 : $\begin{cases} \cos(\gamma) = 0 \\ \sin(\gamma) = 0 \end{cases}$ que ω soit racine du polynôme P_1 et que $\lambda \leq 3/2$ pour que y_1 et y_2 soient régulières (elles s'annulent toutes deux en $x=1$). Il y a une infinité de solutions de ces équations transcendantales, indicé par $n=1,2,\dots$

Pour $m=2$: la solution s'écrit :

$$y(x) = \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{2\lambda+3}{4}}} e^{i\gamma x} \left\{ x + i \frac{4\lambda^2 - 1 + 4\omega}{8\gamma} \right\} = y_1(x) + i y_2(x)$$

$$y_1(x) = \frac{8\gamma x \cos(\gamma x) - (4\lambda^2 - 1 + 4\omega) \sin(\gamma x)}{8\gamma (1-x^2)^{\frac{2\lambda+3}{4}}} \quad y_1(-x) = -y_1(x)$$

$$y_2(x) = \frac{(4\lambda^2 - 1 + 4\omega) \cos(\gamma x) + 8\gamma x \sin(\gamma x)}{8\gamma (1-x^2)^{\frac{2\lambda+3}{4}}} \quad y_2(-x) = y_2(x)$$

$$\omega \quad / \quad P_2(\omega, \lambda, \gamma^2) = 16\omega^2 + 8\omega(4\lambda^2 - 5) + 16\lambda^4 - 40\lambda^2 + 64\gamma^2 + 9 = 0$$

La régularité des fonctions y_1 et y_2 est obtenue lorsque qu'elles sont finies toutes deux en $x=1$. Or ces deux fonctions présentent un développement suivant autour de $x=1$ avec $h(x)$ une fonction régulière en $x=1$, mais ne s'annulant pas en $x=1$:

$$y_1(1) = 0 \Rightarrow 8\gamma \cos(\gamma) = (4\lambda^2 - 1 + 4\omega) \sin(\gamma) \Rightarrow y_1(x) \approx \frac{P_2(\omega, \lambda, \gamma^2)}{128\gamma 2^{\frac{2\lambda-1}{4}} (1-x)^{\frac{2\lambda-1}{4}}} \sin(\gamma) + (1-x)^{\frac{5-2\lambda}{4}} \sin(\gamma) h(x)$$

$$y_2(1) = 0 \Rightarrow (4\lambda^2 - 1 + 4\omega) \cos(\gamma) = -8\gamma \sin(\gamma) \Rightarrow y_2(x) \approx -\frac{P_2(\omega, \lambda, \gamma^2)}{128\gamma 2^{\frac{2\lambda-1}{4}} (1-x)^{\frac{2\lambda-1}{4}}} \cos(\gamma) - (1-x)^{\frac{5-2\lambda}{4}} \cos(\gamma) h(x)$$

Il suffit donc que γ soit solution de l'une des équations transcendantales pour l'une des fonctions y_1 ou y_2 : $\begin{cases} 8\gamma \cos(\gamma) = (4\lambda^2 - 1 + 4\omega) \sin(\gamma) \\ (4\lambda^2 - 1 + 4\omega) \cos(\gamma) = -8\gamma \sin(\gamma) \end{cases}$ que ω soit racine du polynôme P_2 et que $\lambda \leq 5/2$ pour que y_1 et y_2 soient régulières (elles s'annulent toutes deux en $x=1$). Il y a une infinité de solutions de ces équations transcendantales, indicé par $n=1,2,\dots$

Pour m=3 :

$$y(x) = (1-x^2)^{\frac{2\lambda+5}{4}} e^{i\gamma x} \left\{ x^2 + i \frac{4\lambda^2 - 1 + 4\omega}{8\gamma} x + \frac{-9 - 128\gamma^2 + 40\lambda^2 - 16\lambda^4 + 40\omega - 32\lambda^2\omega - 16\omega^2}{128\gamma^2} \right\}$$

$$\omega \quad / \quad P_3(\omega, \lambda, \gamma^2) = 225 - 1036\lambda^2 + 560\lambda^4 - 64\lambda^6 - 256\gamma^2(-17 + 4\lambda^2) - 4(259 + 256\gamma^2 - 280\lambda^2 + 48\lambda^4)\omega + (560 - 192\lambda^2)\omega^2 - 64\omega^3 = 0$$

$$y(x) = y_1(x) + i y_2(x) \quad y_1(-x) = y_1(x) \quad y_2(-x) = -y_2(x)$$

$$\begin{cases} y_1(1) = 0 \Rightarrow 16\gamma \sin(\gamma) = -(4\omega + 4\lambda^2 - 9)\cos(\gamma) \\ y_1(1) = 0 \Rightarrow 16\gamma \cos(\gamma) = (4\omega + 4\lambda^2 - 9)\sin(\gamma) \end{cases}$$

Et les développements autour de $x=1$ sont les suivants avec $h_1(x)$ et $h_2(x)$ deux fonctions régulières en $x=1$:

$$y_1(x) \approx \frac{P_3(\omega, \lambda, \gamma^2)h_1(x)}{(1-x)^{\frac{2\lambda+1}{4}}} \cos(\gamma) + (1-x)^{\frac{7-2\lambda}{4}} \cos(\gamma)h_2(x)$$

$$y_2(x) \approx -\frac{P_3(\omega, \lambda, \gamma^2)h_1(x)}{(1-x)^{\frac{2\lambda+1}{4}}} \sin(\gamma) - (1-x)^{\frac{7-2\lambda}{4}} \sin(\gamma)h_2(x)$$

Là encore les fonctions y_1 et y_2 sont bien régulières dans la mesure où γ est solution de l'une des équations transcendantales et ω soit racine du polynôme P_3 et que $\lambda \leq 7/2$.

Pour m=4 :

$$y(x) = \frac{e^{i\gamma x}}{(1-x^2)^{\frac{2\lambda+7}{4}}} \left\{ x^2 + i \frac{4\lambda^2 - 1 + 4\omega}{8\gamma} x + \frac{-9 - 192\gamma^2 + 40\lambda^2 - 16\lambda^4 + 40\omega - 32\lambda^2\omega - 16\omega^2}{128\gamma^2} + \right. \\ \left. + i \frac{225 + 8128\gamma^2 - 1036\lambda^2 - 1792\gamma^2\lambda^2 + 560\lambda^4 - 64\lambda^6 - 1036\omega - 1792\gamma^2\omega + 1120\lambda^2\omega - 192\lambda^4\omega + 560\omega^2 - 192\lambda^2\omega^2 - 64\omega^3}{3072\gamma^3} \right\}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \omega \quad / \quad P_4(\omega, \lambda, \gamma^2) = \\ -11025 - 36864\gamma^4 + 51664\lambda^2 - 31584\lambda^4 + 5376\lambda^6 - 256\lambda^8 - 128\gamma^2(3149 - 1096\lambda^2 + 80\lambda^4) - \\ -16(-3229 + 3948\lambda^2 - 1008\lambda^4 + 64\lambda^6 + 64\gamma^2(-137 + 20\lambda^2))\omega - \\ -32(987 + 320\gamma^2 - 504\lambda^2 + 48\lambda^4)\omega^2 + \\ + 256(21 - 4\lambda^2)\omega^3 - \\ -256\omega^4 = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$y(x) = y_1(x) + i y_2(x) \quad y_1(-x) = -y_1(x) \quad y_2(-x) = y_2(x)$$

$$\begin{cases} y_1(1) = 0 \Rightarrow \cos(\gamma) = \frac{-225 - 7744\gamma^2 + 1036\lambda^2 + 256\gamma^2\lambda^2 - 560\lambda^4 + 64\lambda^6 + 1036\omega + 256\gamma^2\omega - 1120\lambda^2\omega + 192\lambda^4\omega - 560\omega^2 + 192\lambda^2\omega^2 + 64\omega^3}{24\gamma(9 + 64\gamma^2 - 40\lambda^2 + 16\lambda^4 - 40\omega + 32\lambda^2\omega + 16\omega^2)} \sin(\gamma) \\ y_1(1) = 0 \Rightarrow \sin(\gamma) = -\frac{-225 - 7744\gamma^2 + 1036\lambda^2 + 256\gamma^2\lambda^2 - 560\lambda^4 + 64\lambda^6 + 1036\omega + 256\gamma^2\omega - 1120\lambda^2\omega + 192\lambda^4\omega - 560\omega^2 + 192\lambda^2\omega^2 + 64\omega^3}{24\gamma(9 + 64\gamma^2 - 40\lambda^2 + 16\lambda^4 - 40\omega + 32\lambda^2\omega + 16\omega^2)} \cos(\gamma) \end{cases}$$

Et les développements autour de $x=1$ sont les suivants avec $h_1(x)$ et $h_2(x)$ deux fonctions régulières en $x=1$:

$$y_1(x) \approx \frac{P_4(\omega, \lambda, \gamma^2)h_1(x)}{(1-x)^{\frac{2\lambda-5}{4}}} \sin(\gamma) + (1-x)^{\frac{9-2\lambda}{4}} \sin(\gamma)h_2(x)$$

$$y_2(x) \approx -\frac{P_4(\omega, \lambda, \gamma^2)h_1(x)}{(1-x)^{\frac{2\lambda-5}{4}}} \cos(\gamma) - (1-x)^{\frac{9-2\lambda}{4}} \sin(\gamma)h_2(x)$$

Là encore les fonctions y_1 et y_2 sont bien régulières dans la mesure où γ est solution de l'une des équations transcendantales et ω soit racine du polynôme P_4 et que $\lambda \leq 9/2$.

On peut donc proposer un résultat général qui assure la régularité des solutions en $x=1$ et -1 , mais qui reste à démontrer :

$$\begin{aligned}
 y(x) &= \frac{e^{i\gamma x}}{(1-x^2)^{\frac{2\lambda-1+2m}{4}}} \sum_{l=0}^{l=m-1} a_l x^l = y_1(x) + i y_2(x) \Leftrightarrow y_1(x) = \operatorname{Re}(y(x)) \quad y_2(x) = \operatorname{Im}(y(x)) \\
 \left\{ \begin{array}{l} a_m = 0 \quad a_{m-1} = 1 \quad a_{m-2} = i \frac{4\omega + 4\lambda^2 - 1}{8\gamma} \\ \dots \\ -2i\gamma(l+1-m)a_l + \left(\lambda^2 - \frac{9}{4} - l^2 + 3m - m^2 + l(2m-3) - \lambda^2 + \omega \right) a_{l+1} + (l+2)(2i\gamma a_{l+2} + (l+3)a_{l+3}) = 0 \end{array} \right. \\
 \left\{ \begin{array}{l} a_0 = a_0(\omega) \text{ polynôme de degré } m-1 \text{ en } \omega \\ a_1 = a_1(\omega) \text{ polynôme de degré } m-2 \text{ en } \omega \\ \dots \\ a_{m-2} = a_{m-2}(\omega) \text{ polynôme de degré } 1 \text{ en } \omega \\ a_{m-1} = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P_m(\omega, \lambda, \gamma^2) = a_0 \left(\omega + \lambda^2 - \frac{1}{4} + m(1-m) \right) + 2(i\gamma a_1 + a_2) = 0 \\ \text{Polynôme caractéristique de degré } m \text{ en } \omega \\ \omega \text{ racine de } P_m(\omega, \lambda, \gamma^2) = 0 \end{array} \right. \\
 y_1(x) = \frac{u_1(x, \lambda, \gamma)}{(1-x^2)^{\frac{2\lambda-1+2m}{4}}} \quad y_2(x) = \frac{u_2(x, \lambda, \gamma)}{(1-x^2)^{\frac{2\lambda-1+2m}{4}}} \quad u_1(-x, \lambda, \gamma) = (-1)^{m-1} u_1(x, \lambda, \gamma) \quad u_2(-x, \lambda, \gamma) = (-1)^m u_2(x, \lambda, \gamma^2) \\
 \left\{ \begin{array}{l} \gamma \text{ tel que } u_1(x=1, \lambda, \gamma) = 0 \rightarrow y_1(x) \approx (\cos(\gamma))^{\operatorname{Mod}(m,2)} (\sin(\gamma))^{1-\operatorname{Mod}(m,2)} \left(\frac{P_m(\omega, \lambda, \gamma^2) h_1(x)}{(1-x)^{\frac{2m-3-2\lambda}{4}}} + (1-x)^{\frac{2m+1-2\lambda}{4}} g_1(x) \right) \\ \gamma \text{ tel que } u_2(x=1, \lambda, \gamma^2) = 0 \rightarrow y_2(x) \approx (\sin(\gamma))^{\operatorname{Mod}(m,2)} (\cos(\gamma))^{1-\operatorname{Mod}(m,2)} \left(\frac{P_m(\omega, \lambda, \gamma^2) h_2(x)}{(1-x)^{\frac{2m-3-2\lambda}{4}}} + (1-x)^{\frac{2m+1-2\lambda}{4}} g_2(x) \right) \end{array} \right. \\
 h_1(x), g_1(x), h_2(x), g_2(x) \text{ fonctions régulières en } x=1 \\
 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} y_1(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 2} y_2(x) = 0 \quad \text{Lorsque } \lambda \leq \frac{2m+1}{2}
 \end{aligned}$$

Il existe donc bien des fonctions angulaires déterminées soit par l'annulation en $x=0$ soit par l'annulation de la dérivée première en $x=0$ et l'annulation en $x=1$, pour lesquelles ω est racine du polynôme caractéristique, γ racines d'une équation transcendante en nombre infini et dénombrable (on peut donc les indexer par l'entier $n=1,2,\dots$) et que $\lambda \leq (2m+1)/2$. Les fonctions angulaires ont été construites par la récurrence des coefficients du développement définies plus haut, le polynôme caractéristique s'en déduit également. Les parties réelle et imaginaire conduisent à deux fonctions de parité différente.

Je n'aborde pas la question de la normalisation de ces fonctions angulaires, sachant qu'il s'agit d'appliquer sur une des solutions la norme préconisée dans ce document.

Transformation de l'équation différentielle hyper-sphéroïdale : forme de Liouville et lien avec l'équation différentielle de Mathieu

Par le changement de variable suivant, l'équation différentielle prend la forme dites de Liouville :

$$\begin{aligned} (1-x^2) \frac{d^2 y(x)}{dx^2} - (2\lambda+1)x \frac{dy(x)}{dx} + \left(\omega + \gamma^2(1-x^2) - \frac{\mu(\mu+2\lambda-1)}{1-x^2} \right) y(x) &= 0 \\ x = \cos(\vartheta) \quad y(x) = (1-x^2)^{-\frac{\lambda}{2}} g(\vartheta) &= (\sin^2(\vartheta))^{-\frac{\lambda}{2}} g(\vartheta) \\ \Rightarrow g''(\vartheta) + \left(\omega + \lambda^2 + \gamma^2 \sin^2(\vartheta) - \frac{(\mu+\lambda)(\mu+\lambda-1)}{\sin^2(\vartheta)} \right) g(\vartheta) &= 0 \\ \Rightarrow g''(\vartheta) + \left(\omega + \lambda^2 + \frac{\gamma^2}{2} - \gamma^2 \frac{\cos(2\vartheta)}{2} - \frac{(\mu+\lambda)(\mu+\lambda-1)}{\sin^2(\vartheta)} \right) g(\vartheta) &= 0 \end{aligned}$$

Lorsque $\mu = 1-\lambda$ ou $\mu = -\lambda$, l'équation différentielle devient une équation de Mathieu :

$$\begin{aligned} g''(\vartheta) + \left(\omega + \lambda^2 + \frac{\gamma^2}{2} - \frac{\gamma^2}{2} \cos(2\vartheta) \right) g(\vartheta) &= 0 \\ q = \frac{\gamma^2}{4} \quad a = \omega + \lambda^2 + \frac{\gamma^2}{2} \Rightarrow g''(\vartheta) + (a - 2q \cos(2\vartheta)) g(\vartheta) &= 0 \end{aligned}$$

Lorsque $\mu = 1-\lambda$, la normalisation des fonctions hyper-sphéroïdales se simplifie :

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(d_{v,k}^{\lambda,\mu}(\gamma^2) \right)^2 \frac{2\lambda+2v}{2\lambda+2v+4k} \frac{\Gamma(v+2k+\mu+2\lambda)}{\Gamma(v+2k-\mu+1)} \frac{\Gamma(v-\mu+1)}{\Gamma(v+\mu+2\lambda)} &= 1 \\ \mu = 1-\lambda \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(d_{v,k}^{\lambda,\mu}(\gamma^2) \right)^2 &= 1 \end{aligned}$$

De ce fait lorsque $\mu = 1-\lambda$, il s'agit également de fonctions hyper-sphéroïdales angulaires dont les solutions peuvent être construites à partir des fonctions de Mathieu, ce que nous allons voir dans le point suivant.

Les solutions exactes lorsque $\mu=1-\lambda$

Partons tout d'abord de la relation de récurrence initiale :

$$A_k d_{v,k-1}^{\lambda,\mu}(\gamma^2) + (B_k - \omega(\gamma^2)) d_{v,k}^{\lambda,\mu}(\gamma^2) + C_k d_{v,k+1}^{\lambda,\mu}(\gamma^2) = 0 \quad k \in \{-\infty, \dots, 0, 1, \dots, +\infty\}$$

$$\begin{cases} A_k = -\gamma^2 \frac{(v - \mu + 2k - 1)(v - \mu + 2k)}{(2v + 4k + 2\lambda - 2)(2v + 4k + 2\lambda - 4)} \\ B_k = (v + 2k)(v + 2k + 2\lambda) - 2\gamma^2 \frac{(v + 2k)(v + 2k + 2\lambda) + \mu^2 - 1 + (2\lambda - 1)(\mu + \lambda)}{(2v + 4k + 2\lambda - 2)(2v + 4k + 2\lambda + 2)} \\ C_k = -\gamma^2 \frac{(v + \mu + 2k + 2\lambda)(v + \mu + 2k + 2\lambda + 1)}{(2v + 4k + 2\lambda + 2)(2v + 4k + 2\lambda + 4)} \end{cases}$$

Lorsque $\mu = 1 - \lambda$ cette relation est particulièrement simplifiée :

$$A_k = C_k = -\frac{\gamma^2}{4} \quad B_k = (v + 2k)(v + 2k + 2\lambda) - \frac{\gamma^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma^2}{4} d_{v,k-1}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) - \left((v + 2k)(v + 2k + 2\lambda) - \frac{\gamma^2}{2} - \omega(\gamma^2) \right) d_{v,k}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) + \frac{\gamma^2}{4} d_{v,k+1}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) = 0$$

De la transformation de l'équation hyper-sphéroïdale, on peut penser que de nouvelles solutions exactes sont obtenues lorsque $\mu = 1 - \lambda$ à l'aide des fonctions de Mathieu. Comme dans le cas où λ est demi-entier, on peut utiliser la définition des fonctions de Gegenbauer associées :

$$C_v^{\lambda,\mu}(z) = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} (1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{\lambda+v-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z) \quad C_{(\varrho),v}^{\lambda,\mu}(z) = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} (1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} Q_{\lambda+v-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z)$$

Il vient :

$$\mu = 1 - \lambda \Rightarrow C_v^{\lambda,1-\lambda}(z) = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} (1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{\lambda+v-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(z) \quad C_{(\varrho),v}^{\lambda,1-\lambda}(z) = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} (1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} Q_{\lambda+v-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(z)$$

$$\text{Or l'on sait que : } P_{\lambda+v-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\text{Cos}((\lambda+v)\text{ArcCos}(x))}{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}} \quad Q_{\lambda+v-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(x) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Sin}((\lambda+v)\text{ArcCos}(x))}{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}$$

$$\text{D'où : } \mu = 1 - \lambda \Rightarrow \begin{cases} C_v^{\lambda,1-\lambda}(x) = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \frac{2^{1-\lambda}}{\Gamma(\lambda)} (1-x^2)^{-\frac{\lambda}{2}} \text{Cos}((\lambda+v)\text{ArcCos}(x)) \\ C_{(\varrho),v}^{\lambda,1-\lambda}(x) = -(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \pi \frac{2^{-\lambda}}{\Gamma(\lambda)} (1-x^2)^{-\frac{\lambda}{2}} \text{Sin}((\lambda+v)\text{ArcCos}(x)) \end{cases}$$

Ce qui fait que les deux développements : $hps_v^{\lambda,\mu}(x, \gamma^2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k d_{n,k}^{\lambda,\mu}(\gamma^2) C_{v+2k}^{\lambda,\mu}(x)$ s'écrivent ici

$$hqs_v^{\lambda,\mu}(x, \gamma^2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k d_{n,k}^{\lambda,\mu}(\gamma^2) C_{(\varrho),v+2k}^{\lambda,\mu}(x)$$

$$\text{sous la forme : } \begin{cases} hps_v^{\lambda,1-\lambda}(x, \gamma^2) = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \frac{2^{1-\lambda}}{\Gamma(\lambda)} (1-x^2)^{-\frac{\lambda}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k d_{v,k}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) \text{Cos}((\lambda+v)\text{ArcCos}(x)) \\ hqs_v^{\lambda,1-\lambda}(x, \gamma^2) = -(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \pi \frac{2^{-\lambda}}{\Gamma(\lambda)} (1-x^2)^{-\frac{\lambda}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k d_{v,k}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) \text{Sin}((\lambda+v)\text{ArcCos}(x)) \end{cases}$$

Cas particulier lorsque $v+\lambda$ est entier

Dans ce cas la relation de récurrence est invariante par le changement d'indice suivant :

$$2k \rightarrow -2v-2\lambda-2k :$$

Soit :

$$\frac{\gamma^2}{4} d_{v,k-1}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) - \left((v+2k)(v+2k+2\lambda) - \frac{\gamma^2}{2} - \omega(\gamma^2) \right) d_{v,k}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) + \frac{\gamma^2}{4} d_{v,k+1}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) = 0$$

$$k = -(v+\lambda) - \tilde{k} \Rightarrow \frac{\gamma^2}{4} d_{v,-v-\lambda-1-\tilde{k}}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) - \left((v+2\lambda+2\tilde{k})(v+2\tilde{k}) - \frac{\gamma^2}{2} - \omega(\gamma^2) \right) d_{v,-v-\lambda-\tilde{k}}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) + \frac{\gamma^2}{4} d_{v,-v-\lambda+1-\tilde{k}}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) = 0$$

Dès lors la situation est en fait plus complexe qu'il n'y paraît. En effet lorsque l'ordre $v+\lambda$ est un entier la construction des fonctions de Mathieu est en générale double. Il existe deux valeurs propres caractéristiques de cette équation notées a et b . Comme l'équation des ondes hyper-sphéroïdales est liée à celle de Mathieu lorsque $\mu=1-\lambda$ (voir forme de Liouville), il en est de même. Et les solutions hyper-sphéroïdales se construisent à l'identique avec les fonctions de Mathieu angulaire « ce » ou « se » d'ordre entier pair ou impair.

De plus l'invariance de la relation de récurrence par le changement d'indice implique tant la symétrie que l'anti-symétrie des coefficients du développement. En effet en posant la proportionnalité : $d_{v,-v-\lambda-k}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) = \alpha d_{v,k}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) \Rightarrow \alpha^2 = 1$ le coefficient α est égal à 1 ou -1 :

$$d_{v,-v-\lambda-k}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) = d_{v,k}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) \quad \text{ou} \quad d_{v,-v-\lambda-k}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) = -d_{v,k}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2)$$

On note l'indice k_0 : $k_0 = -v - \lambda \rightarrow d_{v,k_0-k}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) = d_{v,k}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) \quad \text{ou} \quad d_{v,k_0-k}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) = -d_{v,k}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2)$.

Dans ce qui suit on remarque également que :

$$\begin{aligned} \cos((v+\lambda+2k)\text{ArcCos}(x)) &= \cos((v+\lambda-2v-2\lambda-2k)\text{ArcCos}(x)) \\ \sin((v+\lambda+2k)\text{ArcCos}(x)) &= -\sin((v+\lambda-2v-2\lambda-2k)\text{ArcCos}(x)) \end{aligned}$$

Comme dans le cas des fonctions d'ondes hyper-sphéroïdales, il faut tenir compte du changement de signe du facteur $(-1)^k$ dans la transformation : $k \rightarrow k_0 - k$ lorsque $v+\lambda$ est un entier :

$$k_0 = v + \lambda \rightarrow (-1)^k \rightarrow (-1)^{k_0} (-1)^k \rightarrow \begin{cases} v + \lambda & \text{pair} & (-1)^{k_0} = 1 \\ v + \lambda & \text{impair} & (-1)^{k_0} = -1 \end{cases}$$

Lorsque $v+\lambda$ est un entier, il y a toujours deux valeurs caractéristiques ω qui permettent de construire deux fonctions hyper-sphéroïdales dont les parités sont différentes. Ces deux valeurs caractéristiques sont choisies parmi les deux premières valeurs propres ordonnées de façon croissante et nous pouvons conventionnellement les associer au degré v et l'ordre $\mu=1-\lambda$. Nous les noterons : $\omega_{v,1}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2), \omega_{v,2}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) \quad \omega_{v,1}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) < \omega_{v,2}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2)$.

Ainsi les résultats suivants sont constatés :

Lorsque $\nu+\lambda$ est pair alors pour la première valeur propre $\omega_{\nu,1}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2)$, les coefficients sont anti-symétriques : $d_{\nu, \frac{k_0}{2}}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2)=0$ et $d_{\nu, k_0-k}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2)=-d_{\nu, k}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2)$, et seul le développement de la fonction hyper-sphéroïdales de première espèce est identiquement nul. Il ne reste que celui de la fonction de deuxième espèce :

$$\nu + \lambda = 2p \rightarrow \begin{cases} hps_{\nu}^{\lambda,1-\lambda}(x, \gamma^2) = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \frac{2^{1-\lambda}}{\Gamma(\lambda)} (1-x^2)^{-\frac{\lambda}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k d_{\nu, k}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) \cos(2(p+k) \operatorname{ArcCos}(x)) \equiv 0 \\ hqs_{\nu}^{\lambda,1-\lambda}(x, \gamma^2) = -(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \pi \frac{2^{-\lambda}}{\Gamma(\lambda)} (1-x^2)^{-\frac{\lambda}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k d_{\nu, k}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) \sin(2(p+k) \operatorname{ArcCos}(x)) \neq 0 \end{cases}$$

Lorsque $\nu+\lambda$ est pair alors pour la deuxième valeur propre $\omega_{\nu,2}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2)$, les coefficients sont symétriques : $d_{\nu, \frac{k_0}{2}}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) \neq 0$ et $d_{\nu, k_0-k}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) = d_{\nu, k}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2)$, et seul le développement de la fonction hyper-sphéroïdales de deuxième espèce est identiquement nul :

$$\nu + \lambda = 2p \rightarrow \begin{cases} hps_{\nu}^{\lambda,1-\lambda}(x, \gamma^2) = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \frac{2^{1-\lambda}}{\Gamma(\lambda)} (1-x^2)^{-\frac{\lambda}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k d_{\nu, k}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) \cos(2(p+k) \operatorname{ArcCos}(x)) \neq 0 \\ hqs_{\nu}^{\lambda,1-\lambda}(x, \gamma^2) = -(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \pi \frac{2^{-\lambda}}{\Gamma(\lambda)} (1-x^2)^{-\frac{\lambda}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k d_{\nu, k}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) \sin(2(p+k) \operatorname{ArcCos}(x)) \equiv 0 \end{cases}$$

Lorsque $\nu+\lambda$ est impair alors pour la première valeur propre $\omega_{\nu,1}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2)$, les coefficients sont symétriques : $\frac{k_0}{2} \notin \mathbb{N}$ et $d_{\nu, k_0-k}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) = d_{\nu, k}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2)$, mais avec le facteur $(-1)^{k_0}$ seul le développement de la fonction hyper-sphéroïdales de premier espèce est identiquement nul :

$$\nu + \lambda = 2p + 1 \rightarrow \begin{cases} hps_{\nu}^{\lambda,1-\lambda}(x, \gamma^2) = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \frac{2^{1-\lambda}}{\Gamma(\lambda)} (1-x^2)^{-\frac{\lambda}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k d_{\nu, k}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) \cos((2(p+k)+1) \operatorname{ArcCos}(x)) \equiv 0 \\ hqs_{\nu}^{\lambda,1-\lambda}(x, \gamma^2) = -(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \pi \frac{2^{-\lambda}}{\Gamma(\lambda)} (1-x^2)^{-\frac{\lambda}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k d_{\nu, k}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) \sin((2(p+k)+1) \operatorname{ArcCos}(x)) \neq 0 \end{cases}$$

Lorsque $\nu+\lambda$ est impair alors pour la deuxième valeur de $\omega_{\nu,2}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2)$, les coefficients sont anti-symétriques : $\frac{k_0}{2} \notin \mathbb{N}$ et $d_{\nu, k_0-k}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) = -d_{\nu, k}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2)$, mais avec le facteur $(-1)^{k_0}$ seul le développement de la fonction hyper-sphéroïdales de deuxième espèce est identiquement nul :

$$\nu + \lambda = 2p + 1 \rightarrow \begin{cases} hps_{\nu}^{\lambda,1-\lambda}(x, \gamma^2) = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \frac{2^{1-\lambda}}{\Gamma(\lambda)} (1-x^2)^{-\frac{\lambda}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k d_{\nu, k}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) \cos((2(p+k)+1) \operatorname{ArcCos}(x)) \neq 0 \\ hqs_{\nu}^{\lambda,1-\lambda}(x, \gamma^2) = -(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \pi \frac{2^{-\lambda}}{\Gamma(\lambda)} (1-x^2)^{-\frac{\lambda}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k d_{\nu, k}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) \sin((2(p+k)+1) \operatorname{ArcCos}(x)) \equiv 0 \end{cases}$$

Compte tenu des parités évoquées ci-dessus, les développements se simplifient. Lorsque $\nu+\lambda$ est pair pour la première valeur propre $\omega_{\nu,1}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2)$ il vient :

$$\nu + \lambda = 2p \rightarrow hps_{\nu}^{\lambda,1-\lambda}(x, \gamma^2) \equiv 0 \quad hqs_{\nu}^{\lambda,1-\lambda}(x, \gamma^2) = -(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \pi \frac{2^{1-\lambda}}{\Gamma(\lambda)} (1-x^2)^{-\frac{\lambda}{2}} \sum_{k=k_0}^{+\infty} (-1)^k d_{\nu, k}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) \sin(2(p+k) \operatorname{ArcCos}(x))$$

Lorsque $v+\lambda$ est pair pour la deuxième valeur propre $\omega_{v,2}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2)$ il vient :

$$v + \lambda = 2p \rightarrow hps_v^{\lambda,1-\lambda}(x, \gamma^2) = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \frac{2^{1-\lambda}}{\Gamma(\lambda)} (1-x^2)^{-\frac{\lambda}{2}} \left\{ \begin{aligned} &(-1)^{k_0} d_{v,k_0}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) \cos(2(p+k_0) \operatorname{ArcCos}(x)) + \\ &+ 2 \sum_{k=k_0+1}^{k=+\infty} (-1)^k d_{v,k}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) \cos(2(p+k) \operatorname{ArcCos}(x)) \end{aligned} \right\} \quad hqs_v^{\lambda,1-\lambda}(x, \gamma^2) \equiv 0$$

Lorsque $v+\lambda$ est impair pour la première valeur propre $\omega_{v,1}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2)$ il vient :

$$v + \lambda = 2p + 1 \rightarrow hps_v^{\lambda,1-\lambda}(x, \gamma^2) \equiv 0 \quad hqs_v^{\lambda,1-\lambda}(x, \gamma^2) = -(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \pi \frac{2^{1-\lambda}}{\Gamma(\lambda)} (1-x^2)^{-\frac{\lambda}{2}} \sum_{k=k_0}^{k=+\infty} (-1)^k d_{v,k}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) \sin((2(p+k)+1) \operatorname{ArcCos}(x))$$

Lorsque $v+\lambda$ est impair pour la deuxième valeur de $\omega_{v,2}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2)$ il vient :

$$v + \lambda = 2p + 1 \rightarrow hps_v^{\lambda,1-\lambda}(x, \gamma^2) = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \frac{2^{1-\lambda}}{\Gamma(\lambda)} (1-x^2)^{-\frac{\lambda}{2}} \left\{ \begin{aligned} &(-1)^{k_0} d_{v,k_0}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) \cos((2(p+k_0)+1) \operatorname{ArcCos}(x)) + \\ &+ 2 \sum_{k=k_0+1}^{k=+\infty} (-1)^k d_{v,k}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) \cos((2(p+k)+1) \operatorname{ArcCos}(x)) \end{aligned} \right\} \quad hqs_v^{\lambda,1-\lambda}(x, \gamma^2) \equiv 0$$

Voyons maintenant de quelle manière ces deux développements sont effectivement liés aux développements des fonctions de Mathieu de première et deuxième espèce.

Liens directs avec les fonctions de Mathieu

Les fonctions de Mathieu d'ordre v quelconque sont solutions de l'équation différentielle de Mathieu et possèdent un développement en fonctions sinusoïdales suivant :

$$\begin{cases} g''(x) + (a - 2q \cos(2x))g(x) = 0 \\ me_v(x, q) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{2k}^v(q) e^{i(v+2k)x} \Rightarrow \begin{cases} ce_v(x, q) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{2k}^v(q) \cos((v+2k)x) \\ se_v(x, q) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{2k}^v(q) \sin((v+2k)x) \end{cases} \end{cases}$$

Avec un tel développement alors les coefficients du développement suivent la relation de récurrence suivante :

$$q c_{2k-2}^v(\gamma^2) + ((r+2k)^2 - a) c_{2k}^v(\gamma^2) + q c_{2k+2}^v(\gamma^2) = 0$$

Sachant que la normalisation usuelle pour les fonctions de Mathieu de première et deuxième espèce est la suivante : $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (c_{2k}^v(q))^2 = 1$.

Or lorsque $\mu=1-\lambda$, la relation de récurrence des deux fonctions hyper-sphéroïdales de première et deuxième espèce redonnent bien la même relation de récurrence que celle des fonctions de Mathieu par les substitutions suivantes :

$$\frac{\gamma^2}{4} d_{v,k-1}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) - \left((v+2k)(v+2k+2\lambda) - \frac{\gamma^2}{2} - \omega(\gamma^2) \right) d_{v,k}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) + \frac{\gamma^2}{4} d_{v,k+1}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) = 0$$

$$\text{Posons } v = r - \lambda \quad a = \omega(\gamma^2) + \lambda^2 + \frac{\gamma^2}{2} \quad \frac{\gamma^2}{4} = q \Rightarrow q d_{v,k-1}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) - ((r+2k)^2 - a) d_{v,k}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) + q d_{v,k+1}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) = 0$$

$$\text{Posons } (-1)^k d_{v,k}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) = c_{2k}^r(q) \rightarrow q c_{2k-2}^r(q) + ((r+2k)^2 - a) c_{2k}^r(q) + q c_{2k+2}^r(q) = 0$$

$$\text{Avec plus précisément } a \rightarrow a_r(q) \quad \omega \rightarrow \omega_v^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) \Rightarrow a_r(q) = \lambda^2 + \omega_v^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) + \frac{\gamma^2}{2}$$

De plus la normalisation des coefficients du développement est identique.

Cas $v+\lambda$ non entier

Les fonctions hyper-sphéroïdales sont strictement proportionnelles aux fonctions de Mathieu, et comme la normalisation est identique l'on peut écrire directement lorsque $v+\lambda$ n'est pas un entier :

$$\begin{cases} hps_v^{\lambda,1-\lambda}(x, \gamma^2) = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \frac{2^{1-\lambda}}{\Gamma(\lambda)} (1-x^2)^{-\frac{\lambda}{2}} ce_{v+\lambda}(x, q) \\ hqs_v^{\lambda,1-\lambda}(x, \gamma^2) = -(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \pi \frac{2^{-\lambda}}{\Gamma(\lambda)} (1-x^2)^{-\frac{\lambda}{2}} se_{v+\lambda}(x, q) \\ q = \frac{\gamma^2}{4} \quad \omega_v^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) = a_{v+\lambda}(q) - \lambda^2 - \frac{\gamma^2}{2} = b_{v+\lambda}(q) - \lambda^2 - \frac{\gamma^2}{2} \end{cases}$$

Remarque les valeurs caractéristiques a et b de l'équation de Mathieu sont identiques lorsque l'ordre $v+\lambda$ est non entier et les deux fonctions de Mathieu d'ordre $v+\lambda$ non entier forment bien deux solutions indépendantes de l'équation de Mathieu.

Cas $\nu+\lambda$ entier

Par contre lorsque l'ordre $\nu+\lambda$ est entier la correspondance est plus complexe, car l'étude des valeurs propres de l'équation hyper-sphéroïdale prouve que l'on atteint à chaque fois les deux valeurs caractéristiques a et b de l'équation de Mathieu :

$$\left\{ \begin{array}{l} q = \frac{\gamma^2}{4} \quad \nu + \lambda \in \mathbf{N} \quad \omega_{\nu,1}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) < \omega_{\nu,2}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) \\ \omega_{\nu,1}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) = b_{\nu+\lambda}(q) - \lambda^2 - \frac{\gamma^2}{2} \\ \omega_{\nu,2}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2) = a_{\nu+\lambda}(q) - \lambda^2 - \frac{\gamma^2}{2} \end{array} \right\} \quad b_{\nu+\lambda}(q) < a_{\nu+\lambda}(q)$$

La méthode de construction des fonctions hyper-sphéroïdales est donc plus complexe car il faut tenir compte de la parité des solutions et du fait que pour un même indice $\nu+\lambda$ il y a deux solutions avec deux valeurs caractéristiques distinctes.

Lorsque $\nu+\lambda$ est pair alors pour la première valeur propre $\omega_{\nu,1}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2)$:

$$\nu + \lambda = 2p > 0 \rightarrow hps_{\nu}^{\lambda,1-\lambda}(x, \gamma^2) \equiv 0 \quad hqs_{\nu}^{\lambda,1-\lambda}(x, \gamma^2) = -(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \pi \frac{2^{-\lambda}}{\Gamma(\lambda)} (1-x^2)^{-\frac{\lambda}{2}} se_{\nu+\lambda}(x, q) = -(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \pi \frac{2^{-\lambda}}{\Gamma(\lambda)} (1-x^2)^{-\frac{\lambda}{2}} se_{2p}(x, q)$$

Lorsque $\nu+\lambda$ est pair alors pour la deuxième valeur propre $\omega_{\nu,2}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2)$:

$$\nu + \lambda = 2p \rightarrow hps_{\nu}^{\lambda,1-\lambda}(x, \gamma^2) = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \frac{2^{1-\lambda}}{\Gamma(\lambda)} (1-x^2)^{-\frac{\lambda}{2}} ce_{\nu+\frac{1}{2}}(x, q) = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \frac{2^{1-\lambda}}{\Gamma(\lambda)} (1-x^2)^{-\frac{\lambda}{2}} ce_{2p}(x, q) \quad hqs_{\nu}^{\lambda,1-\lambda}(x, \gamma^2) \equiv 0$$

Lorsque $\nu+\lambda$ est impair alors pour la première valeur propre $\omega_{\nu,1}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2)$:

$$\nu + \lambda = 2p + 1 \rightarrow hps_{\nu}^{\lambda,1-\lambda}(x, \gamma^2) \equiv 0 \quad hqs_{\nu}^{\lambda,1-\lambda}(x, \gamma^2) = -(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \pi \frac{2^{-\lambda}}{\Gamma(\lambda)} (1-x^2)^{-\frac{\lambda}{2}} se_{\nu+\frac{1}{2}}(x, q) = -(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \pi \frac{2^{-\lambda}}{\Gamma(\lambda)} (1-x^2)^{-\frac{\lambda}{2}} se_{2p+1}(x, q)$$

Lorsque $\nu+\lambda$ est impair alors pour la deuxième valeur de $\omega_{\nu,2}^{\lambda,1-\lambda}(\gamma^2)$:

$$\nu + \lambda = 2p + 1 \rightarrow hps_{\nu}^{\lambda,1-\lambda}(x, \gamma^2) = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \frac{2^{1-\lambda}}{\Gamma(\lambda)} (1-x^2)^{-\frac{\lambda}{2}} ce_{\nu+\frac{1}{2}}(x, q) = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \frac{2^{1-\lambda}}{\Gamma(\lambda)} (1-x^2)^{-\frac{\lambda}{2}} ce_{2p+1}(x, q) \quad hqs_{\nu}^{\lambda,1-\lambda}(x, \gamma^2) \equiv 0$$

Pour déterminer les fonctions hyper-sphéroïdales correspondantes dans le cas $\mu=-\lambda$, il suffit d'appliquer la transformation $\mu \rightarrow -\mu+1-2\lambda$. Or pour l'instant la formule de transformation n'est connue que dans le cas où λ est demi-entier sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \nu, \mu \in \mathbf{R} \\ \lambda = \frac{2p+1}{2} \quad p \in \mathbf{N} \end{cases} \quad \begin{cases} hps_{\nu}^{\lambda, -\mu+1-2\lambda}(z) = \frac{\Gamma(\nu - \mu + 1)}{\Gamma(\nu + \mu + 2\lambda)} \left(\sin((\lambda + \mu)\pi) hps_{\nu}^{\lambda, \mu}(z) + \frac{2}{\pi} \cos((\lambda + \mu)\pi) hpq_{\nu}^{\lambda, \mu}(z) \right) \\ hpq_{\nu}^{\lambda, -\mu+1-2\lambda}(z) = \frac{\Gamma(\nu - \mu + 1)}{\Gamma(\nu + \mu + 2\lambda)} \left(\sin((\lambda + \mu)\pi) hpq_{\nu}^{\lambda, \mu}(z) - \frac{\pi}{2} \cos((\lambda + \mu)\pi) hps_{\nu}^{\lambda, \mu}(z) \right) \end{cases}$$

Avec $\mu=1-\lambda$, il vient :

$$\begin{cases} \nu \in \mathbf{R} & \mu = 1 - \lambda \\ \lambda = \frac{2p+1}{2} & p \in \mathbf{N} \end{cases} \quad \begin{cases} hps_{\nu}^{\lambda, -\lambda}(z) = -\frac{2}{\pi} \frac{\Gamma(\nu + \lambda)}{\Gamma(\nu + 1 + \lambda)} hpq_{\nu}^{\lambda, 1-\lambda}(z) \\ hpq_{\nu}^{\lambda, -\lambda}(z) = \frac{\pi}{2} \frac{\Gamma(\nu + \lambda)}{\Gamma(\nu + 1 + \lambda)} hps_{\nu}^{\lambda, 1-\lambda}(z) \end{cases}$$

Pour déterminer maintenant les fonctions de type 2 (pour $z>1$), appliquons les formules de connexion avec les fonctions de type 1, sachant que $\sin(\pi(\lambda+\mu))=0$:

$$\nu \in \mathbf{R} \quad \mu, \lambda \in \mathbf{N} \rightarrow hps_{2,\nu}^{\lambda, \mu}(z) = (-1)^{\mu} \frac{(z-1)^{\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}} hps_{1,\nu}^{\lambda, \mu}(z) = \frac{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}{(z-1)^{\frac{\mu}{2}}} hps_{1,\nu}^{\lambda, \mu}(z)$$

$$\nu \in \mathbf{R} \quad \mu, \lambda \in \mathbf{N} \rightarrow hqs_{2,\nu}^{\lambda, \mu}(z) = e^{3i\left(\frac{1-2\lambda}{2}\right)\pi} \frac{(z-1)^{\frac{1-2\lambda}{2} \frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{1-2\lambda}{2} \frac{\mu}{2}}} \left(hqs_{1,\nu}^{\lambda, \mu}(z) + (-1)^{\lambda+\mu} \frac{\pi (1-z)^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}}{2 (z-1)^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}} hps_{1,\nu}^{\lambda, \mu}(z) \right) = -e^{i\mu\pi} \frac{(z-1)^{\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}} \left(hqs_{1,\nu}^{\lambda, \mu}(z) - \frac{\pi \sqrt{z-1}}{2 \sqrt{1-z}} hps_{1,\nu}^{\lambda, \mu}(z) \right)$$

$$\nu, \mu \in \mathbf{R} \quad \lambda = \frac{2p+1}{2} \quad p \in \mathbf{N} \rightarrow hps_{2,\nu}^{\lambda, \mu}(z) = (-1)^{\frac{1-2\lambda}{2}} \frac{(1-z)^{\frac{2\lambda-1}{2} + \frac{\mu}{2}}}{(z-1)^{\frac{2\lambda-1}{2} + \frac{\mu}{2}}} hps_{1,\nu}^{\lambda, \mu}(z) = \frac{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}{(z-1)^{\frac{\mu}{2}}} hps_{1,\nu}^{\lambda, \mu}(z)$$

$$\nu, \mu \in \mathbf{R} \quad \lambda = \frac{2p+1}{2} \quad p \in \mathbf{N} \rightarrow hqs_{2,\nu}^{\lambda, \mu}(z) = e^{i\mu\pi} \frac{(z-1)^{\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}} \left(hqs_{1,\nu}^{\lambda, \mu}(z) - (-1)^{\lambda+\mu} \frac{\pi (1-z)^{\lambda+\mu-\frac{1}{2}}}{2 (z-1)^{\lambda+\mu-\frac{1}{2}}} hps_{1,\nu}^{\lambda, \mu}(z) \right) = e^{i\mu\pi} \frac{(z-1)^{\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}} \left(hqs_{1,\nu}^{\lambda, \mu}(z) - \frac{\pi \sqrt{z-1}}{2 \sqrt{1-z}} hps_{1,\nu}^{\lambda, \mu}(z) \right)$$

Construction des fonctions hyper-sphéroïdales dans le cas μ général, non demi-entier et ν demi-entier

On a vu qu'avec un développement sous forme de fonctions de Gegenbauer associées, la récurrence comportait des pôles pour les valeurs de $\nu + \lambda$ entières. La récurrence habituelle était de cette forme :

$$A_k d_{\nu, k-1}^{\lambda, \mu}(\gamma^2) + (B_k - \omega(\gamma^2)) d_{\nu, k}^{\lambda, \mu}(\gamma^2) + C_k d_{\nu, k+1}^{\lambda, \mu}(\gamma^2) = 0 \quad k \in \{-\infty, \dots, 0, 1, \dots, +\infty\}$$

$$\begin{cases} A_k = -\gamma^2 \frac{(\nu - \mu + 2k - 1)(\nu - \mu + 2k)}{(2\nu + 4k + 2\lambda - 2)(2\nu + 4k + 2\lambda - 4)} \\ B_k = (\nu + 2k)(\nu + 2k + 2\lambda) - 2\gamma^2 \frac{(\nu + 2k)(\nu + 2k + 2\lambda) + \mu^2 - 1 + (2\lambda - 1)(\mu + \lambda)}{(2\nu + 4k + 2\lambda - 2)(2\nu + 4k + 2\lambda + 2)} \\ C_k = -\gamma^2 \frac{(\nu + \mu + 2k + 2\lambda)(\nu + \mu + 2k + 2\lambda + 1)}{(2\nu + 4k + 2\lambda + 2)(2\nu + 4k + 2\lambda + 4)} \end{cases}$$

Pôles possibles sur $\frac{1}{2\nu + 4k + 2\lambda - 4}, \frac{1}{2\nu + 4k + 2\lambda - 2}, \frac{1}{2\nu + 4k + 2\lambda + 2}, \frac{1}{2\nu + 4k + 2\lambda + 4}$

Il y a un procédé très simple permettant d'éliminer ce type de pôles, il suffit de proposer un développement utilisant directement des fonctions de Gegenbauer.

$$hps_{\nu}^{\lambda, \mu}(x, \gamma^2) = (1 - x^2)^{\frac{\mu + 2\lambda - 1}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_{\nu, k}^{\Lambda}(\gamma^2) C_{\nu + 2k}^{\Lambda}(x) \quad \text{avec} \quad \Lambda = 1 - \lambda - \mu$$

lorsque l'on injecte le développement proposé dans l'équation des ondes hyper-sphéroïdales, à savoir :

$$(1 - x^2) y'''(x) - (1 + 2\lambda) x y'(x) + \left(\omega + \gamma^2(1 - x^2) - \frac{\mu(\mu + 2\lambda - 1)}{1 - x^2} \right) y(x) = 0$$

$$y(x) = (1 - x^2)^{\frac{\mu + 2\lambda - 1}{2}} g(x) \quad \Lambda = 1 - \lambda - \mu \Rightarrow \begin{cases} (1 - x^2) g''(x) - (1 + 2\Lambda) x g'(x) + (\Omega + \gamma^2(1 - x^2)) g(x) = 0 \\ \Omega = \omega + \lambda^2 - \Lambda^2 \end{cases}$$

Alors cela justifie de développer la fonction $g(x)$ sous la forme : $g(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_{\nu, k}^{\Lambda}(\gamma^2) C_{\nu + 2k}^{\Lambda}(x)$. Et par l'application successive des relations de récurrence sur les fonctions de Gegenbauer :

$$x C_{\nu}^{\Lambda}(z) = \frac{(\nu + 1) C_{\nu+1}^{\Lambda}(z) + (2\Lambda + \nu - 1) C_{\nu-1}^{\Lambda}(z)}{2(\Lambda + \nu)}$$

$$\Rightarrow x^2 C_{\nu}^{\Lambda}(z) = \frac{(\nu + 1)(\nu + 2)}{4(\Lambda + \nu)(\Lambda + \nu + 1)} C_{\nu+2}^{\Lambda}(z) + \frac{\nu^2 + 2\Lambda\nu + \Lambda - 1}{4(\Lambda + \nu - 1)(\Lambda + \nu + 1)} C_{\nu}^{\Lambda}(z) + \frac{(2\Lambda + \nu - 1)(2\Lambda + \nu - 2)}{4(\Lambda + \nu)(\Lambda + \nu - 1)} C_{\nu-2}^{\Lambda}(z)$$

On obtient la récurrence suivante :

$$\begin{cases} A_k g_{v,k-1}^\Lambda + (B_k - \Omega) g_{v,k}^\Lambda + C_k g_{v,k+1}^\Lambda = 0 & k \in \{-\infty, \dots, -1, \dots, 0, 1, \dots, +\infty\} \\ \Lambda = 1 - \lambda - \mu \\ \Omega = \omega + \lambda^2 - \Lambda^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_k = \frac{\gamma^2}{4} \frac{(v+2k-1)(v+2k)}{(v+\Lambda+2k-2)(v+\Lambda+2k-1)} \\ B_k = (v+2k)(v+2k+2\Lambda) - \frac{\gamma^2}{2} \frac{(v+2k)(v+2k+2\Lambda) + (\Lambda-1)(1+2\Lambda)}{(v+\Lambda+2k-1)(v+\Lambda+2k+1)} \\ C_k = \frac{\gamma^2}{4} \frac{(v+2\Lambda+2k+1)(v+2\Lambda+2k)}{(v+\Lambda+2k+1)(v+\Lambda+2k+2)} \end{cases}$$

Remarques : les conditions pour lesquelles la récurrence ne présente plus de pôle sont liées au fait que la somme $v+\Lambda$ ne soit pas un entier. L'intérêt d'avoir introduit cette récurrence réside dans le fait que la somme $v+\lambda$ soit un entier. Dans le cas contraire le développement avec les fonctions de Gegenbauer associées est suffisant. Or $\Lambda = 1 - \lambda - \mu \Rightarrow v + \Lambda = (v + \lambda) + 1 - \lambda - (\lambda + \mu)$. Lorsque $\mu+\lambda$ est un entier alors il suffirait que $1-\lambda$ ne soit pas un entier, mais même si la récurrence est définie, nous verrons rapidement que les fonctions de Gegenbauer de première espèce ne sont pas définies dans ce cas. Donc le développement introduit ne résout pas le problème de la construction lorsque $\mu+\lambda$ est entier et $v+\lambda$ entier. En revanche pour le cas $\mu+\lambda$ non entier et $v+\lambda$ entier, on constate que le développement portent sur tous les indices k de $-\infty$ à $+\infty$ car les coefficients A_k et C_k ne s'annulent jamais. Cela permet de compléter une partie de la construction des fonctions hyper-sphéroïdales. Le deuxième cas où la récurrence comporte encore des pôles est lorsque $1-2\lambda-\mu$ est un entier, soit $\mu+2\lambda - 1$ est un entier.

Exception faite des remarques précédentes, il n'y a aucun souci particulier pour la construction des secondes solutions à l'aide des développements dont les coefficients suivent la même relation de récurrence :

$$hqs_v^{\lambda,\mu}(x, \gamma^2) = (1-x^2)^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_{v,k}^\Lambda(\gamma^2) C_{(Q),v+2k}^\Lambda(x) \quad \text{avec} \quad \Lambda = 1 - \lambda - \mu$$

Les fonctions de Gegenbauer de première espèce (un polynôme notamment lorsque de degré est entier sont définis ainsi :

$$C_v^\Lambda(z) = \frac{2^{\frac{1-2\Lambda}{2}} \sqrt{\pi} \Gamma(v+2\Lambda)}{\Gamma(v+1)\Gamma(\Lambda)} (1-z^2)^{\frac{1-2\Lambda}{4}} P_{\Lambda+v-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\Lambda}(z)$$

C'est bien un polynôme car le terme non polynomiale de la fonction associée de Legendre compense le facteur $(1-z^2)^{\frac{1-2\Lambda}{4}}$. Cette fonction est également donnée à l'aide de la fonction hypergéométrique :

$$C_v^\Lambda(z) = \frac{\Gamma(v+2\Lambda)}{\Gamma(v+1)\Gamma(2\Lambda)} {}_2F_1\left(-v, v+2\Lambda; \Lambda + \frac{1}{2}; \frac{1-z}{2}\right) \quad \forall z$$

Par extension, les fonctions de Gegenbauer de deuxième espèce sont définies à l'aide des mêmes fonctions de Legendre de deuxième espèce :

$$C_{(Q),\nu}^{\Lambda}(z) = \frac{2^{\frac{1-2\Lambda}{2}} \sqrt{\pi} \Gamma(\nu+2\Lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\Lambda)} (1-z^2)^{\frac{1-2\Lambda}{4}} Q_{\Lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\Lambda}(z) \quad z \in]-1,1[$$

Mais attention dans le cas où Λ est un entier négatif ou nul alors la fonction de Gegenbauer est identiquement nulle et ne peut être utilisée dans le développement. Cela correspond au cas où $\mu+\Lambda$ est un entier strictement positif

Pour $z > 1$, les définitions sont :

$$C_{\nu}^{\Lambda}(z) = \frac{2^{\frac{1-2\Lambda}{2}} \sqrt{\pi} \Gamma(\nu+2\Lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\Lambda)} (z^2-1)^{\frac{1-2\Lambda}{4}} P_{\Lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\Lambda}(z) \quad z > 1$$

$$C_{(Q),\nu}^{\Lambda}(z) = \frac{2^{\frac{1-2\Lambda}{2}} \sqrt{\pi} \Gamma(\nu+2\Lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\Lambda)} (z^2-1)^{\frac{1-2\Lambda}{4}} Q_{\Lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\Lambda}(z) \quad z > 1$$

Et avec les fonctions hypergéométriques :

$$Q_{\nu}^{\mu}(z) = e^{i\mu\pi} \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{2^{\nu+1} \Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right) z^{\nu+\mu+1}} (z^2-1)^{\frac{\mu}{2}} {}_2F_1\left(\frac{\nu+\mu+2}{2}, \frac{\nu+\mu+1}{2}; \nu+\frac{3}{2}; \frac{1}{z^2}\right) \quad \nu+\mu \neq -1, -2, -3$$

Ou encore :

$$C_{(Q),\nu}^{\Lambda}(z) = e^{i\left(\frac{1}{2}-\Lambda\right)\pi} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu+2\Lambda)}{2^{2\Lambda+\nu} \Gamma(\Lambda) \Gamma(\nu+\Lambda+1) z^{\nu+2\Lambda}} {}_2F_1\left(\frac{\nu+2\Lambda+1}{2}, \frac{\nu+2\Lambda}{2}; \nu+\Lambda+1; \frac{1}{z^2}\right) \quad 1 < z < \infty$$

ou bien encore :

$$C_{(Q),\nu}^{\Lambda}(z) = e^{i\left(\frac{1}{2}-\Lambda\right)\pi} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu+2\Lambda)}{2^{2\Lambda+\nu} \Gamma(\Lambda) \Gamma(\Lambda+\nu+1) z^{\nu+2\Lambda}} \left(1-\frac{1}{z^2}\right)^{\frac{1-2\Lambda}{2}} {}_2F_1\left(\frac{\nu+2}{2}, \frac{\nu+1}{2}; \Lambda+\nu+1; \frac{1}{z^2}\right) \quad 1 < z < \infty$$

Même si l'on connaît la normalisation des fonctions de Gegenbauer et la normalisation des fonctions d'onde hyper-sphéroïdales, on ne peut déduire une relation de normalisation sur les coefficients du développement.

Les expressions des dérivées premières et secondes de ce type de développement sont les suivantes :

$$(1-x^2)^{\frac{\mu+2\Lambda-1}{2}} hps_{\nu}^{\lambda,\mu}(x, \gamma^2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_{\nu,k}^{\Lambda}(\gamma^2) C_{\nu+2k}^{\Lambda}(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2)^{\frac{\mu+2\Lambda-1}{2}} hps_{\nu}^{\lambda,\mu}(x, \gamma^2) \right\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\Lambda g_{\nu,k}^{\Lambda}(\gamma^2) C_{\nu+2k-1}^{\Lambda+1}(x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left\{ (1-x^2)^{\frac{\mu+2\Lambda-1}{2}} hps_{\nu}^{\lambda,\mu}(x, \gamma^2) \right\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 4\Lambda(\Lambda+1) g_{\nu,k}^{\Lambda}(\gamma^2) C_{\nu+2k-2}^{\Lambda+2}(x)$$

ou bien encore :

$$\begin{aligned}
 hps_v^{\lambda, \mu}(x, \gamma^2) &= (1-x^2)^{-\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_{v,k}^{\Lambda}(\gamma^2) C_{v+2k}^{\Lambda}(x) \\
 \frac{d}{dx} \{hps_v^{\lambda, \mu}(x, \gamma^2)\} &= (1-x^2)^{-\frac{\mu+2\lambda-1}{2}-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_{v,k}^{\Lambda}(\gamma^2) \{2\Lambda(1-x^2) C_{v+2k-1}^{\Lambda+1}(x) + x(\mu+2\lambda-1) C_{v+2k}^{\Lambda}(x)\} \\
 \frac{d^2}{dx^2} \{hps_v^{\lambda, \mu}(x, \gamma^2)\} &= (1-x^2)^{-\frac{\mu+2\lambda-1}{2}-2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_{v,k}^{\Lambda}(\gamma^2) \{(1-x^2)^2 4\Lambda(\Lambda+1) C_{v+2k-2}^{\Lambda+2}(x) + 4x(1-x^2)(\mu+2\lambda-1) \Lambda C_{v+2k-1}^{\Lambda+1}(x) + (\mu+2\lambda-1) \Lambda^2 C_{v+2k}^{\Lambda}(x)\}
 \end{aligned}$$

Il reste maintenant à construire les solutions pour les deux cas :

Cas n°1 : $\mu+\lambda$ est entier et $v+\lambda$ entier

Cas n°1 : $\mu+2\lambda-1$ est un entier et $v+\lambda$ entier

On a vu que pour $\mu+\lambda=1$, le cas $v+\lambda$ entier se construit avec les fonctions de Mathieu périodiques (ou anti-périodiques) de période π et 2π . C'est ce que nous allons essayer dans le prochain chapitre de ce document où je vais étendre cette construction à l'aide des fonctions de Mathieu périodiques associées.

Cas limite $\gamma \rightarrow 0$ pour un degré v quelconque et un ordre $\mu+\lambda$ entier : petite étude des fonctions de Gegenbauer associées sur $z \in [-1, 1]$ de paramètres $(v, \lambda, 1-\lambda)$

On sait que dans le cas où $\gamma=0$ l'équation des ondes hypersphéroïdales se ramène à l'équation différentielle des fonctions de Gegenbauer associées :

$$\begin{aligned}
 (1-z^2)y''(z) - (1+2\lambda)z y'(z) + \left(v(v+2\lambda) - \frac{\mu(\mu+2\lambda-1)}{1-z^2} \right) y(z) &= 0 \\
 y(z) = (1-z^2)^{-\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} g(z) \quad \Lambda = 1-\lambda-\mu \quad y(z) \propto C_v^{\lambda, \mu}(z) \quad &\text{si première espèce} \\
 \Rightarrow \begin{cases} (1-z^2)g''(z) - (1+2\Lambda)z g'(z) + (v+\lambda-\Lambda)(v+\lambda+\Lambda)g(z) = 0 & g(z) \propto C_{v+\lambda-\Lambda}^{\Lambda}(z) = C_{v+\mu+2\lambda-1}^{1-\lambda-\mu}(z) \quad \text{si première espèce} \\ \text{ou bien} \\ (1-z^2)g''(z) - (3-2\lambda-2\mu)z g'(z) + (v-\mu+1)(v+\mu+2\lambda-1)g(z) = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

En poussant plus loin avec une forme de Liouville et spécifiquement pour $\mu=1-\lambda$:

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} z = \cos(t) \\ g(z) = (\sin^2(t))^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}}(t)u(t) \end{cases} &\Rightarrow u''(t) - 2(\mu+\lambda-1)\cotan(t)u'(t) + (v+\mu+2\lambda-1)(v-\mu+1)u(t) = 0 \\
 \mu = 1-\lambda \Rightarrow &\begin{cases} u''(t) + (v+\lambda)^2 u(t) = 0 \\ u(t) = \cos((v+\lambda)t) \quad \text{ou} \quad \sin((v+\lambda)t) \\ g(z) = (\sin^2(t))^{\frac{\lambda}{2}}(t)u(t) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Cela suggère donc que la fonction de Gegenbauer associée en question a la forme suivante :

$$C_v^{\lambda, 1-\lambda}(z) \propto (1-z^2)^{-\frac{\lambda}{2}} \text{Cos}((v+\lambda) \text{ArcCos}(z))$$

Or d'après une formule valable lorsque λ est un demi-entier et pour le paramètre μ quelconque :

$$\begin{aligned} \lambda, \mu \in \mathbf{R} \quad \lambda = \frac{2p+1}{2} \quad p \in \mathbf{N} \quad C_v^{\lambda, \mu}(z) &= (-1)^{\frac{2\lambda-1}{2}} \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} (1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{\lambda+v-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z) \\ \Rightarrow \mu = 1-\lambda \quad \lambda = \frac{2p+1}{2} \quad p \in \mathbf{N} \quad C_v^{\lambda, 1-\lambda}(z) &= (-1)^{\frac{2\lambda-1}{2}} \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} (1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{\lambda+v-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(z) \end{aligned}$$

Comme $P_v^{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\text{Cos}\left(\left(v+\frac{1}{2}\right) \text{ArcCos}(z)\right)}{(1-z^2)^{\frac{1}{4}}} \Rightarrow P_{v-\frac{1}{2}+\lambda}^{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\text{Cos}((v+\lambda) \text{ArcCos}(z))}{(1-z^2)^{\frac{1}{4}}}$, il vient :

$$\lambda = \frac{2p+1}{2} \quad p \in \mathbf{N} \quad C_v^{\lambda, 1-\lambda}(z) = (-1)^{\frac{2\lambda-1}{2}} \frac{2^{1-\lambda}}{\Gamma(\lambda)} \frac{\text{Cos}((v+\lambda) \text{ArcCos}(z))}{(1-z^2)^{\frac{\lambda}{2}}}$$

Par mesure de simplification on peut supprimer le terme $(-1)^{\frac{2\lambda-1}{2}}$ car par la suite nous n'allons regarder que la forme des fonctions de Gegenbauer associés des ordres voisins : $-\lambda, 2-\lambda, 3-\lambda$, etc ... ce qui je l'espère n'aura aucune influence sur les résultats obtenus. Partons donc de l'expression :

$$\forall \lambda \quad \begin{cases} C_v^{\lambda, 1-\lambda}(z) = \frac{2^{1-\lambda}}{\Gamma(\lambda)} \frac{\text{Cos}((v+\lambda) \text{ArcCos}(z))}{(1-z^2)^{\frac{\lambda}{2}}} \\ C_{(Q),v}^{\lambda, 1-\lambda}(z) = A(\lambda) \frac{\text{Sin}((v+\lambda) \text{ArcCos}(z))}{(1-z^2)^{\frac{\lambda}{2}}} \end{cases}$$

Pour obtenir l'expression pour la fonction de deuxième espèce, je tire profit de l'expression du Wronskien des fonctions de Gegenbauer associées:

$$\begin{aligned} W\{C_v^{\lambda, \mu}(z), C_{(Q),v}^{\lambda, \mu}(z)\} &= \frac{2^{1-2\lambda} \pi}{\Gamma(\lambda)^2} \frac{\Gamma(v+2\lambda+\mu)}{\Gamma(v+1-\mu)} (1-z^2)^{-\frac{1+2\lambda}{2}} \\ \Rightarrow W\{C_v^{\lambda, 1-\lambda}(z), C_{(Q),v}^{\lambda, 1-\lambda}(z)\} &= \frac{2^{1-2\lambda} \pi}{\Gamma(\lambda)^2} \frac{\Gamma(v+\lambda+1)}{\Gamma(v+\lambda)} (1-z^2)^{-\frac{1+2\lambda}{2}} = \frac{2^{1-2\lambda} \pi}{\Gamma(\lambda)^2} (v+\lambda) (1-z^2)^{-\frac{1+2\lambda}{2}} \end{aligned}$$

Il vient alors :

$$W(C_v^{\lambda,1-\lambda}(z), C_{(Q),v}^{\lambda,1-\lambda}(z)) = \frac{2^{1-\lambda}}{\Gamma(\lambda)} \frac{A(\lambda)}{(1-z^2)^\lambda} W(\cos((v+\lambda)\text{ArcCos}(z)), \sin((v+\lambda)\text{ArcCos}(z))) = -\frac{2^{1-\lambda}}{\Gamma(\lambda)} \frac{A(\lambda)}{(1-z^2)^{\frac{2\lambda+1}{2}}} (v+\lambda)$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2^{2\lambda-1}} \frac{(v+\lambda)}{(\Gamma(\lambda))^2} (1-z^2)^{\frac{1+2\lambda}{2}} = -\frac{2^{1-\lambda}}{\Gamma(\lambda)} \frac{A(\lambda)}{(1-z^2)^{\frac{2\lambda+1}{2}}} (v+\lambda) \Rightarrow A(\lambda) = -\frac{\pi 2^{-\lambda}}{\Gamma(\lambda)}$$

L'expression de la fonction de deuxième espèce est donc :

$$\forall \lambda \in \mathbf{R} \quad C_{(Q),v}^{\lambda,1-\lambda}(z) = -\frac{\pi}{2^\lambda \Gamma(\lambda)} \frac{\sin((v+\lambda)\text{ArcCos}(z))}{(1-z^2)^{\frac{\lambda}{2}}}.$$

Résumons les expressions obtenues : $\forall \lambda \in \mathbf{R}$

$$\begin{cases} C_v^{\lambda,1-\lambda}(z) = \frac{2^{1-\lambda}}{\Gamma(\lambda)} \frac{\cos((v+\lambda)\text{ArcCos}(z))}{(1-z^2)^{\frac{\lambda}{2}}} \\ C_{(Q),v}^{\lambda,1-\lambda}(z) = -\frac{\pi}{2^\lambda \Gamma(\lambda)} \frac{\sin((v+\lambda)\text{ArcCos}(z))}{(1-z^2)^{\frac{\lambda}{2}}} \end{cases}$$

Avant d'établir une récurrence à trois termes sur les fonctions $C_v^{\lambda,n-\lambda}(z), C_{(Q),v}^{\lambda,n-\lambda}(z)$, il faut mettre à profit une formule de liaison par la transformation de l'ordre $\mu \rightarrow -\mu+1-2\lambda$, pour débiter la récurrence par la connaissance d'au moins deux de ces fonctions :

$$\begin{cases} C_v^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(z) = \frac{\Gamma(v-\mu+1)}{\Gamma(v+\mu+2\lambda)} \left(\sin((\lambda+\mu)\pi) C_v^{\lambda,\mu}(z) + \frac{2}{\pi} \cos((\lambda+\mu)\pi) C_{(Q),v}^{\lambda,\mu}(z) \right) \\ C_{(Q),v}^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(z) = \frac{\Gamma(v-\mu+1)}{\Gamma(v+\mu+2\lambda)} \left(\sin((\lambda+\mu)\pi) C_{(Q),v}^{\lambda,\mu}(z) - \frac{\pi}{2} \cos((\lambda+\mu)\pi) C_v^{\lambda,\mu}(z) \right) \end{cases}$$

$$\text{Si } \lambda + \mu \in \mathbf{N} \Rightarrow \begin{cases} C_v^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(z) = \frac{2}{\pi} \frac{\Gamma(v-\mu+1)}{\Gamma(v+\mu+2\lambda)} \cos((\lambda+\mu)\pi) C_{(Q),v}^{\lambda,\mu}(z) \\ C_{(Q),v}^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(z) = -\frac{\pi}{2} \frac{\Gamma(v-\mu+1)}{\Gamma(v+\mu+2\lambda)} \cos((\lambda+\mu)\pi) C_v^{\lambda,\mu}(z) \end{cases}$$

Formules que l'on peut mettre en relation lorsque $\lambda=1/2$ et avec celles-ci :

$$z \in [-1,1] \quad \begin{cases} P_v^{-\mu}(z) = -\frac{2}{\pi \sin(\mu\pi)} \frac{\Gamma(v-\mu+1)}{\Gamma(v+\mu+1)} Q_v^\mu(z) \\ Q_v^{-\mu}(z) = \frac{\pi \sin(\mu\pi)}{2} \frac{\Gamma(v-\mu+1)}{\Gamma(v+\mu+1)} P_v^\mu(z) \end{cases} \quad \mu = \frac{2n+1}{2} \quad n \in \mathbf{N}$$

On peut utiliser ces dernières relation pour calculer les fonctions sur le jeu de paramètre suivant :

$$\begin{cases} C_v^{\lambda, -\mu+1-2\lambda}(z) = \frac{2}{\pi} \frac{\Gamma(v-\mu+1)}{\Gamma(v+\mu+2\lambda)} \cos((\lambda+\mu)\pi) C_{(Q),v}^{\lambda,\mu}(z) \\ C_{(Q),v}^{\lambda, -\mu+1-2\lambda}(z) = -\frac{\pi}{2} \frac{\Gamma(v-\mu+1)}{\Gamma(v+\mu+2\lambda)} \cos((\lambda+\mu)\pi) C_v^{\lambda,\mu}(z) \end{cases} \quad \mu = 1-\lambda \Rightarrow \begin{cases} C_v^{\lambda, -\lambda}(z) = -\frac{2}{\pi} \frac{C_{(Q),v}^{\lambda, 1-\lambda}(z)}{v+\lambda} \\ C_{(Q),v}^{\lambda, -\lambda}(z) = \frac{\pi}{2} \frac{C_v^{\lambda, 1-\lambda}(z)}{v+\lambda} \end{cases}$$

$$\forall \lambda \in \mathbf{R} \quad \begin{cases} C_v^{\lambda, 1-\lambda}(z) = \frac{2^{1-\lambda}}{\Gamma(\lambda)} \frac{\cos((v+\lambda)\text{ArcCos}(z))}{(1-z^2)^{\frac{\lambda}{2}}} \\ C_{(Q),v}^{\lambda, 1-\lambda}(z) = -\frac{\pi}{2^\lambda \Gamma(\lambda)} \frac{\sin((v+\lambda)\text{ArcCos}(z))}{(1-z^2)^{\frac{\lambda}{2}}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_v^{\lambda, -\lambda}(z) = \frac{2^{1-\lambda}}{(v+\lambda)\Gamma(\lambda)} \frac{\sin((v+\lambda)\text{ArcCos}(z))}{(1-z^2)^{\frac{\lambda}{2}}} \\ C_{(Q),v}^{\lambda, -\lambda}(z) = \frac{\pi}{(v+\lambda)\Gamma(\lambda)} 2^{-\lambda} \frac{\cos((v+\lambda)\text{ArcCos}(z))}{(1-z^2)^{\frac{\lambda}{2}}} \end{cases}$$

Tirons maintenant une loi de récurrence à partir de la récurrence sur les ordres pour les fonctions de Gegenbauer associées. Utilisons pour cela une correspondance entre les fonctions de Gegenbauer associées et les fonctions de Gegenbauer (même si cette correspondance n'est valable que pour les ordre μ entier) :

$$\forall \mu \in \mathbf{N} \quad C_v^{\lambda, \mu}(z) = (-1)^\mu 2^\mu (1-z^2)^{\frac{\mu}{2}} \frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda)} C_{v-\mu}^{\lambda+\mu}(z)$$

Les fonctions de Gegenbauer suivent la récurrence suivante :

$$4(1-z^2)(\lambda+\mu)(\lambda+\mu+1)C_{v-\mu-2}^{\lambda+\mu+2}(z) - 2z(\lambda+\mu)(1+2(\lambda+\mu))C_{v-\mu-1}^{\lambda+\mu+1}(z) + (v-\mu)(v-\mu+2(\lambda+\mu))C_{v-\mu}^{\lambda+\mu}(z) = 0$$

Alors les fonctions de Gegenbauer associées suivent la récurrence suivante sur les ordres μ voisins :

$$C_v^{\lambda, \mu+2}(z) + \frac{z(1+2(\lambda+\mu))}{\sqrt{1-z^2}} C_v^{\lambda, \mu+1}(z) + (v-\mu)(v+\mu+2\lambda) C_v^{\lambda, \mu}(z) = 0$$

Selon cette formule alors les fonctions $C_v^{\lambda, n-\lambda}(z)$ suivent la récurrence suivante :

$$\begin{cases} C_v^{\lambda, n+2-\lambda}(z) + \frac{z(1+2n)}{\sqrt{1-z^2}} C_v^{\lambda, n+1-\lambda}(z) + (v+\lambda-n)(v+\lambda+n) C_v^{\lambda, n-\lambda}(z) = 0 \\ C_{(Q),v}^{\lambda, n+2-\lambda}(z) + \frac{z(1+2n)}{\sqrt{1-z^2}} C_{(Q),v}^{\lambda, n+1-\lambda}(z) + (v+\lambda-n)(v+\lambda+n) C_{(Q),v}^{\lambda, n-\lambda}(z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_v^{\lambda, n+2-\lambda}(z) = -\frac{z(1+2n)}{\sqrt{1-z^2}} C_v^{\lambda, n+1-\lambda}(z) - (v+\lambda-n)(v+\lambda+n) C_v^{\lambda, n-\lambda}(z) \\ C_{(Q),v}^{\lambda, n+2-\lambda}(z) = -\frac{z(1+2n)}{\sqrt{1-z^2}} C_{(Q),v}^{\lambda, n+1-\lambda}(z) - (v+\lambda-n)(v+\lambda+n) C_{(Q),v}^{\lambda, n-\lambda}(z) \end{cases}$$

Lorsque $\lambda=1/2$ cette formule est à mettre en relation avec la formule de récurrence pour les fonctions de Legendre associées d'ordre demi-entier :

$$z \in [-1, 1] \quad P_v^{\mu+2}(z) + \frac{2z(\mu+1)}{\sqrt{1-z^2}} P_v^{\mu+1}(z) + (v+\mu+1)(v-\mu) P_v^{\mu}(z) = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \rightarrow C_v^{\lambda, n-\lambda}(z) = P_v^{n-\frac{1}{2}}(z) \leftarrow C_v^{\lambda, 1-\lambda}(z) = P_v^{\frac{1}{2}}(z)$$

$$\mu = n - \frac{1}{2} \Rightarrow P_v^{n+\frac{3}{2}}(z) + \frac{z(2n+1)}{\sqrt{1-z^2}} P_v^{n+\frac{1}{2}}(z) + \left(v + \frac{1}{2} + n\right) \left(v + \frac{1}{2} - n\right) P_v^{n-\frac{1}{2}}(z) = 0$$

Cette relation va permettre de calculer les expressions des fonctions $C_v^{\lambda, n-\lambda}(z), C_{(Q),v}^{\lambda, n-\lambda}(z)$ sur les ordres successifs. Par exemple pour $\mu=3/2$:

$$\begin{cases} C_v^{\lambda, -\lambda}(z) = \frac{2^{1-\lambda}}{(v+\lambda)\Gamma(\lambda)} \frac{\sin((v+\lambda)\text{ArcCos}(z))}{(1-z^2)^{\frac{\lambda}{2}}} \\ C_{(Q),v}^{\lambda, -\lambda}(z) = \frac{\pi}{(v+\lambda)\Gamma(\lambda)} 2^{-\lambda} \frac{\cos((v+\lambda)\text{ArcCos}(z))}{(1-z^2)^{\frac{\lambda}{2}}} \end{cases} \quad \begin{cases} C_v^{\lambda, 1-\lambda}(z) = \frac{2^{1-\lambda}}{\Gamma(\lambda)} \frac{\cos((v+\lambda)\text{ArcCos}(z))}{(1-z^2)^{\frac{\lambda}{2}}} \\ C_{(Q),v}^{\lambda, 1-\lambda}(z) = -\frac{\pi}{2^\lambda \Gamma(\lambda)} \frac{\sin((v+\lambda)\text{ArcCos}(z))}{(1-z^2)^{\frac{\lambda}{2}}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_v^{\lambda, 2-\lambda}(z) = -\frac{z}{\sqrt{1-z^2}} C_v^{\lambda, 1-\lambda}(z) - (v+\lambda)^2 C_v^{\lambda, -\lambda}(z) \\ C_{(Q),v}^{\lambda, 2-\lambda}(z) = -\frac{z}{\sqrt{1-z^2}} C_{(Q),v}^{\lambda, 1-\lambda}(z) - (v+\lambda)^2 C_{(Q),v}^{\lambda, -\lambda}(z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_v^{\lambda, 2-\lambda}(z) = \frac{2^{1-\lambda}}{\Gamma(\lambda)(1-z^2)^{\frac{\lambda+1}{2}}} \left(-z \cos((v+\lambda)\text{ArcCos}(z)) - (v+\lambda)\sqrt{1-z^2} \sin((v+\lambda)\text{ArcCos}(z)) \right) \\ C_{(Q),v}^{\lambda, 2-\lambda}(z) = \frac{\pi}{2^\lambda \Gamma(\lambda)(1-z^2)^{\frac{\lambda+1}{2}}} \left(z \sin((v+\lambda)\text{ArcCos}(z)) - (v+\lambda)\sqrt{1-z^2} \cos((v+\lambda)\text{ArcCos}(z)) \right) \end{cases}$$

$$z = \cos(\text{ArcCos}(z)) \quad \sqrt{1-z^2} = \sin(\text{ArcCos}(z))$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_v^{\lambda, 2-\lambda}(z) = \frac{2^{1-\lambda}}{\Gamma(\lambda)(1-z^2)^{\frac{\lambda+1}{2}}} \left(-\cos(\text{ArcCos}(z)) \cos((v+\lambda)\text{ArcCos}(z)) - (v+\lambda) \sin(\text{ArcCos}(z)) \sin((v+\lambda)\text{ArcCos}(z)) \right) \\ C_{(Q),v}^{\lambda, 2-\lambda}(z) = \frac{\pi}{2^\lambda \Gamma(\lambda)(1-z^2)^{\frac{\lambda+1}{2}}} \left(\cos(\text{ArcCos}(z)) \sin((v+\lambda)\text{ArcCos}(z)) - (v+\lambda) \sin(\text{ArcCos}(z)) \cos((v+\lambda)\text{ArcCos}(z)) \right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_v^{\lambda, 2-\lambda}(z) = \frac{2^{1-\lambda}}{\Gamma(\lambda)(1-z^2)^{\frac{\lambda+1}{2}}} \left(-\frac{v+1+\lambda}{2} \cos((v-1+\lambda)\text{ArcCos}(z)) + \frac{v-1+\lambda}{2} \cos((v+1+\lambda)\text{ArcCos}(z)) \right) \\ C_{(Q),v}^{\lambda, 2-\lambda}(z) = \frac{\pi}{2^\lambda \Gamma(\lambda)(1-z^2)^{\frac{\lambda+1}{2}}} \left(\frac{v+1+\lambda}{2} \sin((v-1+\lambda)\text{ArcCos}(z)) - \frac{v-1+\lambda}{2} \sin((v+1+\lambda)\text{ArcCos}(z)) \right) \end{cases}$$

On peut donner une forme très précise à ces fonctions d'ordre demi-entiers quelconque, sous la forme :

$$\begin{cases} C_v^{\lambda, n-\lambda}(z) = \frac{2^{1-\lambda} 2^{1-n}}{\Gamma(\lambda)(1-z^2)^{\frac{\lambda+n-1}{2}}} \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{n-1-l} \frac{(n-1)!}{l!(n-1-l)!} \left(\prod_{m=1}^{m=l} v+\lambda-n+m \right) \left(\prod_{m=l+1}^{m=n-1} v+\lambda+m \right) \cos((v+\lambda+2l-(n-1))\text{ArcCos}(z)) \\ C_{(Q),v}^{\lambda, n-\lambda}(z) = \frac{2^{-\lambda} 2^{1-n} \pi}{\Gamma(\lambda)(1-z^2)^{\frac{\lambda+n-1}{2}}} \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{n-2-l} \frac{(n-1)!}{l!(n-1-l)!} \left(\prod_{m=1}^{m=l} v+\lambda-n+m \right) \left(\prod_{m=l+1}^{m=n-1} v+\lambda+m \right) \sin((v+\lambda+2l-(n-1))\text{ArcCos}(z)) \end{cases}$$

Remarque: comme $n=\lambda+\mu$, alors dans l'hypothèse où $v+\lambda$ est un nombre entier, on a $v+\lambda-n+1=v-\mu+1$. Dans ces conditions le développement de la fonction de première espèce est en cosinus impair si $v-\mu$ est pair et en cosinus pair si $v-\mu$ est impair.

Voyons si l'on ne peut pas trouver un développement de la forme $u(t) = \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l+1}^n e^{i(v+\lambda+2l-n+1)t}$ en l'injectant dans l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} u''(t) - 2(\mu+\lambda-1) \cotan(t) u'(t) + (v+\mu+2\lambda-1)(v-\mu+1) u(t) &= 0 \\ \mu = n-\lambda \Leftrightarrow u''(t) - 2(n-1) \cotan(t) u'(t) + (v+\lambda+n-1)(v+\lambda-(n-1)) u(t) &= 0 \end{aligned}$$

Ce développement conduit à une récurrence à deux termes :

$$\begin{cases} l=0 \rightarrow (n-1)(n-1-\nu-\lambda) A_1^n = (1+\nu+\lambda) A_3^n \\ l=1 \rightarrow (n-2)(n-2-\nu-\lambda) A_3^n = 2(2+\nu+\lambda) A_5^n \\ \dots \\ (n-l-1)(n-l-1-\nu-\lambda) A_{2l+1}^n = (l+1)(l+1+\nu+\lambda) A_{2l+3}^n \\ \dots \end{cases}$$

Cette relation de récurrence s'arrête lorsque $l=n-1$ et tous les coefficients d'indice supérieurs s'annulent. Le développement s'arrête également pour $l=0$ du fait l'annulation du membre droit de la récurrence pour $l=-1$. Cela justifie donc d'écrire le développement fini $u(t) = \sum_{l=0}^{l=n-1} A_{2l+1}^n e^{i(\nu+\lambda+2l-n+1)t}$. Le

rapport entre deux coefficients d'indice qui se suivent donne : $\frac{A_{2l+3}^n}{A_{2l+1}^n} = \frac{(n-l-1)(n-l-1-\nu-\lambda)}{(l+1)(l+1+\nu+\lambda)}$.

Le même rapport dans la formule donnée se calcule ainsi et donne le même résultat :

$$\begin{aligned} B_l &= (-1)^{n-1-l} \frac{(n-1)!}{l!(n-1-l)!} \left(\prod_{m=1}^{m=l} \nu + \lambda - n + m \right) \left(\prod_{m=l+1}^{m=n-1} \nu + \lambda + m \right) \\ B_{l+1} &= (-1)^{n-2-l} \frac{(n-1)!}{(l+1)!(n-2-l)!} \left(\prod_{m=1}^{m=l+1} \nu + \lambda - n + m \right) \left(\prod_{m=l+2}^{m=n-1} \nu + \lambda + m \right) \\ \Rightarrow \frac{B_{l+1}}{B_l} &= - \frac{n-1-l}{l+1} \frac{\nu + \lambda - n + l + 1}{\nu + \lambda + l + 1} \end{aligned}$$

La récurrence établie est donc celle qui construit les fonctions de Gegenbauer associées d'ordre $\mu=n-\lambda$, de première et deuxième espèce en prenant les parties réelle et imaginaire, à une constante près bien évidemment.

Valeurs particulières des fonctions de Gegenbauer associées telles que $\mu+\lambda$ est un entier pour certaines valeurs de l'ordre ν

Pour certaines valeurs de l'ordre ν , les expressions établies précédemment se simplifient :

$$\begin{cases} C_{\nu}^{\lambda, n-\lambda}(z) = \frac{2^{1-\lambda} 2^{1-n}}{\Gamma(\lambda)(1-z^2)^{\frac{\lambda+n-1}{2}}} \sum_{l=0}^{l=n-1} (-1)^{n-1-l} \frac{(n-1)!}{l!(n-1-l)!} \left(\prod_{m=1}^{m=l} \nu + \lambda - n + m \right) \left(\prod_{m=l+1}^{m=n-1} \nu + \lambda + m \right) \cos((\nu + \lambda + 2l - (n-1)) \text{ArcCos}(z)) \\ C_{(\varnothing), \nu}^{\lambda, n-\lambda}(z) = \frac{2^{-\lambda} 2^{1-n} \pi}{\Gamma(\lambda)(1-z^2)^{\frac{\lambda+n-1}{2}}} \sum_{l=0}^{l=n-1} (-1)^{n-2-l} \frac{(n-1)!}{l!(n-1-l)!} \left(\prod_{m=1}^{m=l} \nu + \lambda - n + m \right) \left(\prod_{m=l+1}^{m=n-1} \nu + \lambda + m \right) \sin((\nu + \lambda + 2l - (n-1)) \text{ArcCos}(z)) \end{cases}$$

Pour $\nu+\lambda=1-n$, le développement ne contient qu'un seul terme quelque soit la valeur de $n \geq 0$:

$$\begin{cases} \prod_{m=l+1}^{m=n-1} (1-n+m) = 0 \\ l \neq n-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_{1-n-\lambda}^{\lambda, n-\lambda}(z) = \frac{(-1)^{n-1} 2^{1-\lambda} 2^{1-n}}{\Gamma(\lambda)(1-z^2)^{\frac{\lambda+n-1}{2}}} \prod_{m=1}^{m=n-1} (2n-1-m) = (-1)^{n-1} \frac{2^{2-\lambda-n}}{\Gamma(\lambda)} \frac{(2(n-1))!}{(n-1)!} (1-z^2)^{-\frac{\lambda+n-1}{2}} \\ C_{(\varnothing), 1-n-\lambda}^{\lambda, n-\lambda}(z) \equiv 0 \end{cases}$$

Pour $\nu+\lambda=2-n$, le développement ne contient également qu'un seul terme quelque soit la valeur de $n \geq 0$ (deux termes puis un seul) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \prod_{m=l+1}^{m=n-1} (2-n+m) = 0 \\ l \neq n-1 \\ l \neq n-2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_{2-n-\lambda}^{\lambda, n-\lambda}(z) = z (1-z^2)^{-\frac{\lambda+n-1}{2}} \frac{2^{2-\lambda-n}}{\Gamma(\lambda)} 2(-1)^{n-1} \left(\prod_{m=1}^{m=n-1} 2n-2-m \right) = z (1-z^2)^{-\frac{\lambda+n-1}{2}} \frac{2^{2-\lambda-n}}{\Gamma(\lambda)} (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} \quad n > 1 \\ C_{(Q), 2-n-\lambda}^{\lambda, n-\lambda}(z) \equiv 0 \end{array} \right.$$

$$\text{Pour } n=1 \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{1-\lambda}^{\lambda, 1-\lambda}(z) = \frac{2^{1-\lambda} 2^{1-n}}{\Gamma(\lambda) (1-z^2)^{\frac{\lambda}{2}}} z \\ C_{(Q), 1-\lambda}^{\lambda, 1-\lambda}(z) = -\frac{2^{-\lambda} 2^{1-n} \pi}{\Gamma(\lambda) (1-z^2)^{\frac{\lambda}{2}}} \sqrt{1-z^2} \end{array} \right.$$

Pour $\nu+\lambda=3-n$, le développement ne contient que deux termes quelque soit la valeur de $p > 0$ (trois termes se réduisant à deux) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \prod_{m=l+1}^{m=n-1} (3-n+m) = 0 \\ l \neq n-1 \\ l \neq n-2 \\ l \neq n-3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_{3-n-\lambda}^{\lambda, n-\lambda}(z) = (1-z^2)^{-\frac{\lambda+n-1}{2}} \frac{2^{2-\lambda-n}}{\Gamma(\lambda)} \frac{(-1)^{n-2}}{(2n-3)(n-1)!} ((2-n) \cos(2 \arccos(x)) - (n-1)) \quad n > 1 \\ C_{(Q), 3-n-\lambda}^{\lambda, n-\lambda}(z) \equiv 0 \end{array} \right.$$

$$\text{Pour } n=1 \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{2-\lambda}^{\lambda, 1-\lambda}(z) = (1-z^2)^{-\frac{\lambda}{2}} \frac{2^{1-\lambda}}{\Gamma(\lambda)} \cos(2 \arccos(z)) \\ C_{(Q), 2-\lambda}^{\lambda, 1-\lambda}(z) = -(1-z^2)^{-\frac{\lambda}{2}} \frac{\pi 2^{-\lambda}}{\Gamma(\lambda)} \sin(2 \arccos(z)) \end{array} \right.$$

Pour $\nu+\lambda=4-n$, le développement ne contient que deux termes quelque soit la valeur de $p > 0$ (4 termes se réduisant à deux) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \prod_{m=l+1}^{m=n-1} (4-n+m) = 0 \\ l \neq n-1 \\ l \neq n-2 \\ l \neq n-3 \\ l \neq n-4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_{4-n-\lambda}^{\lambda, n-\lambda}(z) = (1-z^2)^{-\frac{\lambda+n-1}{2}} \frac{2^{2-\lambda-n}}{\Gamma(\lambda)} (-1)^{n-2} \frac{(2n-5)!}{(n-3)!} (2(3-n) \cos(3 \arccos(x)) - 6(n-1) \cos(\arccos(x))) \quad n > 2 \\ C_{(Q), 4-n-\lambda}^{\lambda, n-\lambda}(z) \equiv 0 \end{array} \right.$$

$$\text{Pour } n=1 \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{3-\lambda}^{\lambda, 1-\lambda}(z) = (1-z^2)^{-\frac{\lambda}{2}} \frac{2^{1-\lambda}}{\Gamma(\lambda)} \cos(3 \arccos(z)) \\ C_{(Q), 3-\lambda}^{\lambda, 1-\lambda}(z) = -(1-z^2)^{-\frac{\lambda}{2}} \frac{\pi 2^{-\lambda}}{\Gamma(\lambda)} \sin(3 \arccos(z)) \end{array} \right.$$

$$\text{Pour } n=2 \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{2-\lambda}^{\lambda, 1-\lambda}(z) = (1-z^2)^{-\frac{\lambda+1}{2}} \frac{2^{-\lambda}}{\Gamma(\lambda)} (\cos(3 \arccos(x)) - 3 \cos(\arccos(x))) \\ C_{(Q), 2-\lambda}^{\lambda, 1-\lambda}(z) = (1-z^2)^{-\frac{\lambda+1}{2}} \frac{\pi 2^{-\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} (\cos(3 \arccos(x)) - 3 \cos(\arccos(x))) \end{array} \right.$$

On constate donc que quelque soit la valeur de $n > 0$ pour les fonctions de première espèce :

- pour $\nu + \lambda = 1 - n$ et $\nu + \lambda = 2 - n$, le développement ne contient qu'un seul terme non nul . Pour $\nu + \lambda = 1 - n$ c'est un développement en cosinus pair et pour $\nu + \lambda = 2 - n$ un développement en cosinus impair
- pour $\nu + \lambda = 3 - n$ et $\nu + \lambda = 4 - n$, le développement contient deux termes non nuls. Pour $\nu + \lambda = 3 - n$ c'est un développement en cosinus pair et pour $\nu + \lambda = 4 - n$ un développement en cosinus impair
- pour $\nu + \lambda = 5 - n$ et $\nu + \lambda = 6 - n$, le développement contient trois termes non nuls. Pour $\nu + \lambda = 5 - n$ c'est un développement en cosinus pair et pour $\nu + \lambda = 6 - n$ un développement en cosinus impair
- ainsi de suite ...
- et pour $n = 0$ et $n = 1$, le développement n'a qu'un terme.

Deux remarques sur ce petit chapitre

La première : il se trouve qu'une série d'articles de 1949 et 1950 abordent d'une certaine manière ce type de développement avec les fonctions de Gegenbauer dans le cadre de l'équation des ondes sphéroïdales. Il s'agit alors d'étudier les fonctions dites « associées de Mathieu ». Voici au moins trois références :

- 1949, R.Campbell, « Sur une expression remarquable des solutions de période 2π de l'équation de Mathieu associée »
- 1950, R.Campbell « COMPORTEMENT DES FONCTIONS DE MATHIEU ASSOCIÉES POUR LES GRANDES VALEURS DES PARAMÈTRES »
- 1950, R.Campbell « CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION DE MATHIEU ASSOCIÉE »

Il me semble qu'après un examen plus attentif de l'article « CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION DE MATHIEU ASSOCIÉE », ce dernier comporte « peut-être » des erreurs, notamment sur la relation de récurrence des fonctions de Gegenbauer, ce qui peut conduire à une erreur sur la relation de récurrence des coefficients du développement. A titre de comparaison, les auteurs L.J.CHU, J.A.STRATTON proposent dans l'article de 1941, « Elliptic and Spheroidal Wave functions » également un développement en fonctions de Gegenbauer (cas de polynôme), mais ces derniers n'ont pas la même normalisation, il est moins trivial de vérifier la récurrence (Construction des « V-Functions », formule 83). Toutefois la récurrence de L.J.CHU, J.A.STRATTON est non seulement plus cohérente que celle obtenue par R.Campbell, mais par un changement de paramètres est identique à celle établie ici.

La deuxième : telle que présentée par R.Campbell, il est clair que les fonctions associées de Mathieu sont les fonctions sphéroïdales avec un argument $\cos(t)$ ou $\sin(t)$. C'est ce que nous allons voir, car pour le cas des fonctions de Mathieu associées périodiques la construction la plus « cohérente » est celle réalisée par R.L.Ince conduisant à une récurrence à 4 termes.

Par extension à l'étude de l'équation des ondes hyper-sphéroïdales, il n'y a pas d'intérêt à rechercher des solutions non-périodiques des fonctions de Mathieu associées sous forme de série sinusoïdales puisque ce sont celles que j'ai abordé par le développement en fonction de Gegenbauer associées

Construction des fonctions sphéroïdales dans le cas $\mu+\lambda$ et $\nu+\lambda$ entiers, lien avec les fonctions de Mathieu associées

Une des formes de Liouville de l'équation des ondes hyper-sphéroïdales est obtenue avec le changement de variable $x=\cos(t)$:

$$(1-x^2)\frac{d^2y(x)}{dx^2} - (1+2\lambda)x\frac{dy(x)}{dx} + \left(\omega + \gamma^2(1-x^2) - \frac{\mu(\mu+2\lambda-1)}{1-x^2}\right)y(x) = 0 \quad x = \cos(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(x) = (\sin^2(t))^{\frac{\mu}{2}} w(t) \rightarrow w''(t) + 2(\lambda + \mu) \cotan(t) w'(t) + (\omega - \mu(\mu+2\lambda) + \gamma^2 \sin^2(t)) w(t) = 0 \\ y(x) = (\sin^2(t))^{-\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} w(t) \rightarrow w''(t) + 2(1-\lambda-\mu) \cotan(t) w'(t) + (\omega + (\mu+2\lambda-1)(1-\mu) + \gamma^2 \sin^2(t)) w(t) = 0 \end{cases}$$

Une forme équivalente est obtenue avec $y=\sin(t)$:

$$(1-x^2)\frac{d^2y(x)}{dx^2} - (1+2\lambda)x\frac{dy(x)}{dx} + \left(\omega + \gamma^2(1-x^2) - \frac{\mu(\mu+2\lambda-1)}{1-x^2}\right)y(x) = 0 \quad x = \sin(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(x) = (\cos^2(t))^{\frac{\mu}{2}} w(t) \Rightarrow w''(t) - 2(\lambda + \mu) \tan(t) w'(t) + (\omega - \mu(\mu+2\lambda) + \gamma^2 \cos^2(t)) w(t) = 0 \\ y(x) = (\cos^2(t))^{-\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} w(t) \Rightarrow w''(t) + 2(\lambda + \mu - 1) \tan(t) w'(t) + (\omega + (\mu+2\lambda-1)(1-\mu) + \gamma^2 \cos^2(t)) w(t) = 0 \end{cases}$$

Selon un article de 1923 de E.L.Ince, « Associated Mathieu Functions », l'auteur transforme de l'équation sphéroïdale en deux substitutions que je résume ainsi :

$$\begin{cases} (1-x^2)y''(x) - 2x y'(x) + \left(\omega + \gamma^2(1-x^2) - \frac{\mu^2}{1-x^2}\right)y(x) = 0 & x = \cos(t) & \Lambda = \mu + \frac{1}{2} \\ y(x) = (\sin^2(t))^{-\frac{1}{4}} g(t) \Rightarrow q = -\frac{\gamma^2}{4} & a = \omega + \frac{1}{4} + \frac{\gamma^2}{2} \Rightarrow g''(t) + \left(a + 2q \cos(2t) - \frac{\Lambda(\Lambda-1)}{\sin^2(t)}\right)g(t) = 0 \\ g(t) = (\sin^2(t))^{\frac{\Lambda}{2}} u_1(t) \Rightarrow y(x) = (\sin^2(t))^{-\frac{1}{4}} g(t) = (\sin^2(t))^{\frac{2\Lambda-1}{4}} u_1(t) = (\sin^2(t))^{\frac{\mu}{2}} u_1(t) \\ \Rightarrow u_1''(t) + 2\Lambda \cotan(t) u_1'(t) + (a - \Lambda^2 + 2q \cos(2t)) u_1(t) = 0 \\ g(t) = (\sin^2(t))^{\frac{1-\Lambda}{2}} u_2(t) \Rightarrow y(x) = (\sin^2(t))^{-\frac{1}{4}} g(t) = (\sin^2(t))^{-\frac{2\Lambda-1}{4}} u_2(t) = (\sin^2(t))^{-\frac{\mu}{2}} u_2(t) \\ \Rightarrow u_2''(t) + 2(1-\Lambda) \cotan(t) u_2'(t) + (a - (1-\Lambda)^2 + 2q \cos(2t)) u_2(t) = 0 \end{cases}$$

Si nous appliquons une démarche similaire à l'équation hyper-sphéroïdale :

$$(1-x^2)\frac{d^2y(x)}{dx^2} - (1+2\lambda)x\frac{dy(x)}{dx} + \left(\omega + \gamma^2(1-x^2) - \frac{\mu(\mu+2\lambda-1)}{1-x^2}\right)y(x) = 0 \quad x = \cos(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(x) = (\sin^2(t))^{\frac{\mu}{2}} u_1(t) \rightarrow u_1''(t) + 2(\lambda + \mu) \cotan(t) u_1'(t) + (\omega - \mu(\mu+2\lambda) + \gamma^2 \sin^2(t)) u_1(t) = 0 \\ y(x) = (\sin^2(t))^{-\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} u_2(t) \rightarrow u_2''(t) + 2(1-\lambda-\mu) \cotan(t) u_2'(t) + (\omega + (\mu+2\lambda-1)(1-\mu) + \gamma^2 \sin^2(t)) u_2(t) = 0 \end{cases}$$

Par correspondance des paramètres nous écrivons alors :

$$q = -\frac{\gamma^2}{4} \quad \Lambda = \mu + \lambda \quad a - \Lambda^2 = \omega - \mu(\mu+2\lambda) + \frac{\gamma^2}{2} = \omega + \lambda^2 - \Lambda^2 + \frac{\gamma^2}{2} \Rightarrow a = \omega + \lambda^2 + \frac{\gamma^2}{2}$$

$$u_1''(t) + 2\Lambda \cotan(t) u_1'(t) + (a - \Lambda^2 + 2q \cos(2t)) u_1(t) = 0$$

Comme $\begin{cases} 1-\mu = 1-\Lambda + \lambda \\ \mu+2\lambda-1 = \Lambda + \lambda - 1 \end{cases} \Rightarrow (\mu+2\lambda-1)(1-\mu) = \lambda^2 - (1-\Lambda)^2$

$$u_2''(t) + 2(1-\Lambda) \cotan(t) u_2'(t) + (a - (1-\Lambda)^2 + 2q \cos(2t)) u_2(t) = 0$$

Ainsi que l'équation intermédiaire :

$$\begin{cases} (1-x^2)y''(x) - (1+2\lambda)x y'(x) + \left(\omega + \gamma^2(1-x^2) - \frac{\mu(\mu+2\lambda-1)}{1-x^2} \right) y(x) = 0 & x = \cos(t) \quad \Lambda = \mu + \lambda \\ y(x) = (\sin^2(t))^{-\frac{\lambda}{2}} g(t) \Rightarrow q = -\frac{\gamma^2}{4} & a = \omega + \lambda^2 + \frac{\gamma^2}{2} \Rightarrow g''(t) + \left(a + 2q \cos(2t) - \frac{\Lambda(\Lambda-1)}{\sin^2(t)} \right) g(t) = 0 \end{cases}$$

Les deux transformations intermédiaires introduites par E.L.Ince s'écrivent ici sous la forme :

$$\begin{aligned} (\sin^2(t))^{-\frac{\lambda}{2}} g(t) &= (\sin^2(t))^{\frac{\mu}{2}} u_1(t) \Leftrightarrow g(t) = (\sin^2(t))^{-\frac{\lambda+\mu}{2}} u_1(t) = (\sin^2(t))^{\frac{\Lambda}{2}} u_1(t) \\ (\sin^2(t))^{-\frac{\lambda}{2}} g(t) &= (\sin^2(t))^{-\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} u_2(t) \Leftrightarrow g(t) = (\sin^2(t))^{-\frac{1-\mu-\lambda}{2}} = (\sin^2(t))^{-\frac{1-\Lambda}{2}} \end{aligned}$$

Nous retrouvons donc toutes les équations données par E.L.Ince mais cette fois-ci dans le contexte de l'équation hyper-sphéroïdale. Si l'on pose $\Lambda = \lambda - \mu + 1 - 2\lambda = 1 - \mu - \lambda$, le système d'équations est identique car l'équation est invariante par le changement $\Lambda \rightarrow 1 - \Lambda \Leftrightarrow \mu \rightarrow -\mu + 1 - 2\lambda$.

Résumons donc le résultat obtenu après ce dernier changement :

$$\begin{aligned} \Lambda = 1 - \mu - \lambda \quad q &= -\frac{\gamma^2}{4} \quad a = \omega + \lambda^2 + \frac{\gamma^2}{2} \\ \begin{cases} y(x) = (\sin^2(t))^{-\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} u_1(t) \Rightarrow u_1''(t) + 2\Lambda \cotan(t) u_1'(t) + (a - \Lambda^2 + 2q \cos(2t)) u_1(t) = 0 \\ y(x) = (\sin^2(t))^{\frac{\mu}{2}} u_2(t) \Rightarrow u_2''(t) + 2(1-\Lambda) \cotan(t) u_2'(t) + (a - (1-\Lambda)^2 + 2q \cos(2t)) u_2(t) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Remarque : sur cette généralisation de l'équation de Mathieu on remarquera que le paramètre q est de signe inverse dans l'article de E.L.Ince. En effet communément l'équation de Mathieu se note :

$$y''(t) + (a - 2q \cos(2t)) y(t) = 0$$

Et par extension celle l'équation de Mathieu associée :

$$y''(t) + 2\Lambda \cotan(t) y'(t) + (a - \Lambda^2 - 2q \cos(2t)) y(t) = 0$$

Partons maintenant de ces deux équations proposées par E.L.Ince en recherchant la solution sous la forme de fonctions périodiques ou anti-périodiques de période π par des développements identiques en la forme à ceux employés pour les fonctions de Mathieu. Prenons par exemple une solution paire et anti-périodique en t de période π :

$$u_1(t) = \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l+1}^{\Lambda} \cos((2l+1)t)$$

Injectons cette forme dans l'équation différentielle :

$$\sin(t) \{ u_1''(t) + 2\Lambda \cotan(t) u_1'(t) + (a - \Lambda^2 + 2q \cos(2t)) u_1(t) \} = 0$$

Donne sur le terme $A_{2l+1}^{\Lambda} \cos((2l+1)t)$ l'expression suivante :

$$A_{2l+1}^{\Lambda} (-q \sin(2(l-1)t) + (q + (1+2l-\Lambda)^2 - a) \sin(2lt) - (q + (1+2l+\Lambda)^2 - a) \sin(2(l+1)t) + q \sin(2(l+2)t))$$

Qui doit s'annuler une fois les termes de l'expression réparti sur les termes voisins du développement (ils sont tous en fonction Sinus dans l'équation différentielle de départ).

Cela conduit à la relation de récurrence à 4 termes suivante :

$$\begin{cases} l=0 \rightarrow (a - (\Lambda + 1)^2) A_1^\lambda + (-a + q + (\Lambda - 3)^2) A_3^\lambda - q A_5^\lambda = 0 \\ l=1 \rightarrow q A_1^\lambda + (a - (\Lambda + 3)^2 - q) A_3^\lambda + (-a + (\Lambda - 5)^2 + q) A_5^\lambda + q A_7^\lambda = 0 \\ l=2 \rightarrow q A_3^\lambda + (a - (\Lambda + 5)^2 - q) A_5^\lambda + (-a + (\Lambda - 7)^2 + q) A_7^\lambda + q A_9^\lambda = 0 \\ \dots \\ q A_{2l-1}^\lambda + (a - (2l + 1 + \Lambda)^2 - q) A_{2l+1}^\lambda + (-a + (\Lambda - 2l - 3)^2 + q) A_{2l+3}^\lambda - q A_{2l+5}^\lambda = 0 \\ \dots \end{cases}$$

Sous forme matricielle et en changeant de signe pour l'ensemble du système d'équations linéaires on obtient :

$$\begin{bmatrix} (1+\Lambda)^2 & -q-(3-\Lambda)^2 & q & 0 & \dots & 0 \\ -q & q+(3+\Lambda)^2 & -q-(5-\Lambda)^2 & q & \dots & \dots \\ 0 & -q & q+(5+\Lambda)^2 & -q-(7-\Lambda)^2 & q & \dots \\ \dots & 0 & -q & \dots & -q-(2l+1-\Lambda)^2 & 0 \\ \dots & \dots & 0 & -q & q+(2l+1+\Lambda)^2 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_3 \\ A_5 \\ \dots \\ A_{2l+1} \\ \dots \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{M} - a \mathbf{B})\mathbf{A} = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{M} - a \mathbf{I})\mathbf{A} = 0 \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots \end{bmatrix} = [b_{i,j}] \quad \begin{cases} b_{i,j} = 0 & i > j \\ b_{i,j} = 1 \end{cases}$$

On voit donc qu'il s'agit d'un problème de détermination des valeurs et de vecteurs propres de la matrice $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{M}$. Les coefficients du développement sont les vecteurs propres calculées à partir des valeurs propres déterminées par diagonalisation.

Prenons un développement de la forme : $u_1(t) = c e^{\Lambda t} = \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l}^\Lambda \cos(2l t)$, par le même procédé, on parvient à la relation de récurrence à 4 termes suivantes :

$$\begin{cases} l=0 \rightarrow (a - \Lambda^2 - q) A_0^\lambda + (-a + q + (\Lambda - 2)^2) A_2^\lambda - q A_4^\lambda = 0 \\ l=1 \rightarrow q A_0^\lambda + (a - (\Lambda + 2)^2 - q) A_2^\lambda + (-a + (\Lambda - 4)^2 + q) A_4^\lambda + q A_6^\lambda = 0 \\ l=2 \rightarrow q A_2^\lambda + (a - (\Lambda + 4)^2 - q) A_4^\lambda + (-a + (\Lambda - 6)^2 + q) A_6^\lambda + q A_8^\lambda = 0 \\ \dots \\ q A_{2l-2}^\lambda + (a - (2l + \Lambda)^2 - q) A_{2l}^\lambda + (-a + (\Lambda - 2l - 2)^2 + q) A_{2l+2}^\lambda - q A_{2l+4}^\lambda = 0 \\ \dots \end{cases}$$

Sous forme matricielle et encore une fois en changeant de signe pour l'ensemble du système d'équations linéaires on obtient :

$$\begin{pmatrix} q + \Lambda^2 & -2q - (2 - \Lambda)^2 & q & 0 & \dots & 0 \\ -q & q + (2 + \Lambda)^2 & -q - (4 - \Lambda)^2 & q & \dots & \dots \\ 0 & -q & q + (4 + \Lambda)^2 & -q - (6 - \Lambda)^2 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & -q & \dots & -q - (2l - \Lambda)^2 & 0 \\ \dots & \dots & 0 & -q & q + (2l + \Lambda)^2 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_2 \\ A_4 \\ \dots \\ A_{2l} \\ \dots \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{M} - a \mathbf{B})\mathbf{A} = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{M} - a \mathbf{I})\mathbf{A} = 0 \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots \end{pmatrix} = [b_{i,j}] \quad \begin{cases} b_{i,j} = 0 & i > j \\ b_{i,j} = 1 \end{cases}$$

On voit donc qu'il s'agit également d'un problème de détermination des valeurs et de vecteurs propres de la matrice $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{M}$. Les coefficients du développement sont les vecteurs propres calculées à partir des valeurs propres déterminées par diagonalisation.

Dans l'article E.L.Ince introduit les notations des fonctions associées de Mathieu sous une forme, que je change légèrement suivant le changement d'argument (préfixe «c» pour $x=\text{Cos}(t)$ ou «s» pour $x=\text{Sin}(t)$, référence « ce » ou « se » pour les fonctions de Mathieu correspondantes lorsque $q=0$, et inversion du signe du paramètre q) :

$$g''(t) + \left(a + 2q \cos(2t) - \frac{\Lambda(\Lambda-1)}{\sin^2(t)} \right) g(t) = 0 \quad \begin{cases} g(t) = cce_{2n}^\Lambda(t, -q) = (\sin^2(t))^{\frac{\Lambda}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l}^\Lambda(-q) \cos(2l t) \\ g(t) = cce_{2n+1}^\Lambda(t, -q) = (\sin^2(t))^{\frac{\Lambda}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l+1}^\Lambda(-q) \cos((2l+1)t) \\ g(t) = cse_{2n+2}^\Lambda(t, -q) = (\sin^2(t))^{\frac{1-\Lambda}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l+1}^{1-\Lambda}(-q) \cos((2l+1)t) \\ g(t) = cse_{2n+1}^\Lambda(t, -q) = (\sin^2(t))^{\frac{1-\Lambda}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l}^{1-\Lambda}(-q) \cos((2l)t) \end{cases}$$

Évidemment lorsque $\Lambda=0$, les développements sont effectivement d'une forme équivalente aux 4 types de solutions périodiques de l'équation de Mathieu :

$$\begin{cases} \Lambda = 0 \\ \Rightarrow g''(t) + (a + 2q \cos(2t)) g(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} cce_{2n}^0(t, -q) = ce_{2n}(t, -q) = \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l}^0(-q) \cos(2l t) \\ cce_{2n+1}^0(t, -q) = ce_{2n+1}(t, -q) = \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l+1}^0(-q) \cos((2l+1)t) \\ cse_{2n+2}^0(t, -q) = se_{2n+2}(t, -q) = \sin(t) \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l+1}^1(-q) \cos((2l+1)t) = \sum_{l=0}^{l=+\infty} B_{2l+2}(-q) \sin((2l+2)t) \\ cse_{2n+1}^0(t, -q) = se_{2n+1}(t, -q) = \sin(t) \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l}^1(-q) \cos((2l)t) = \sum_{l=0}^{l=+\infty} B_{2l+1}(-q) \sin((2l+1)t) \end{cases}$$

Parallèlement étudions l'autre forme de Liouville obtenue avec $y=\sin(t)$, à savoir :

$$(1-x^2)\frac{d^2y(x)}{dx^2} - (1+2\lambda)x\frac{dy(x)}{dx} + \left(\omega + \gamma^2(1-x^2) - \frac{\mu(\mu+2\lambda-1)}{1-x^2}\right)y(x) = 0 \quad x = \sin(t)$$

$$\Lambda = 1 - \lambda - \mu \quad q = -\frac{\gamma^2}{4} \quad a = \omega + \lambda^2 + \frac{\gamma^2}{2}$$

$$\begin{cases} y(x) = (\cos^2(t))^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} u_1(t) \Rightarrow u_1''(t) - 2\Lambda \tan(t) u_1'(t) + (a - \Lambda^2 - 2q \cos(2t)) u_1(t) = 0 \\ y(x) = (\cos^2(t))^{\frac{\mu}{2}} u_2(t) \Rightarrow u_2''(t) - 2(1-\Lambda) \tan(t) u_2'(t) + (a - (1-\Lambda)^2 - 2q \cos(2t)) u_2(t) = 0 \end{cases}$$

On note qu'il suffit de réaliser le changement d'argument $t \rightarrow \pi/2 - t$ dans les équations précédentes

$$\begin{cases} y(x) = (\sin^2(t))^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} u_1(t) \Rightarrow u_1''(t) + 2\Lambda \cotan(t) u_1'(t) + (a - \Lambda^2 + 2q \cos(2t)) u_1(t) = 0 \\ y(x) = (\sin^2(t))^{\frac{\mu}{2}} u_2(t) \Rightarrow u_2''(t) + 2(1-\Lambda) \cotan(t) u_2'(t) + (a - (1-\Lambda)^2 + 2q \cos(2t)) u_2(t) = 0 \end{cases}$$

pour obtenir la même chose. On peut donc facilement trouver la récurrence d'une solution de la forme $u(t) = \sum_{l=0}^{l=+\infty} B_{2l+1}^{\Lambda} \sin((2l+1)t)$. Partant du développement : $\sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l+1}^{\Lambda} \cos\left((2l+1)\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) = \sum_{l=0}^{l=+\infty} (-1)^l A_{2l+1}^{\Lambda} \sin((2l+1)t)$, il suffit d'alterner les signes des coefficients de la matrice. Soit sous forme matricielle on obtient le système suivant :

$$\begin{pmatrix} (1+\Lambda)^2 & q+(3-\Lambda)^2 & q & 0 & \dots & 0 \\ q & q+(3+\Lambda)^2 & q+(5-\Lambda)^2 & q & \dots & \dots \\ 0 & q & q+(5+\Lambda)^2 & q+(7-\Lambda)^2 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & q & \dots & q+(2l+1-\Lambda)^2 & 0 \\ \dots & \dots & 0 & q & q+(2l+1+\Lambda)^2 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_3 \\ A_5 \\ \dots \\ A_{2l+1} \\ \dots \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{M} - a \mathbf{B}).\mathbf{A} = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{M} - a \mathbf{I}).\mathbf{A} = 0 \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots \end{bmatrix} = [b_{i,j}] \quad \begin{cases} b_{i,j} = 0 & i > j \\ b_{i,j} = (-1)^{i-j} \end{cases}$$

Par une linéarisation trigonométrique, on arrive au même résultat.

De la même manière la récurrence d'une solution de la forme : $u(t) = \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l}^\Lambda \cos(2l t)$, solution de l'équation : $u''(t) - 2\Lambda \tan(t) u'(t) + (a - \Lambda^2 - 2q \cos(2t)) u(t) = 0$, est construite comme suit :

$$\begin{pmatrix} q + \Lambda^2 & 2q + (2 - \Lambda)^2 & q & 0 & \dots & 0 \\ q & q + (2 + \Lambda)^2 & q + (4 - \Lambda)^2 & q & \dots & \dots \\ 0 & q & q + (4 + \Lambda)^2 & q + (6 - \Lambda)^2 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & q & \dots & q + (2l - \Lambda)^2 & 0 \\ \dots & \dots & 0 & q & q + (2l + \Lambda)^2 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_2 \\ A_4 \\ \dots \\ A_{2l} \\ \dots \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{M} - a \mathbf{B})\mathbf{A} = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{M} - a \mathbf{I})\mathbf{A} = 0 \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots \end{pmatrix} = [b_{i,j}] \quad \begin{cases} b_{i,j} = 0 & i > j \\ b_{i,j} = (-1)^{i-j} \end{cases}$$

Donc pour l'équation différentielle intermédiaire $g''(t) + \left(a - 2q \cos(2t) - \frac{\Lambda(\Lambda - 1)}{\cos^2(t)} \right) g(t) = 0$, on peut construire 4 types de solutions (notation préfixe « s » pour x=Sin(t), référence « ce » ou « se » pour les fonctions de Mathieu correspondantes lorsque q=0) :

$$g''(t) + \left(a - 2q \cos(2t) - \frac{\Lambda(\Lambda - 1)}{\cos^2(t)} \right) g(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} g(t) = sce_{2n}^\Lambda(t, q) = (\cos^2(t))^{\frac{\Lambda}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l}^\Lambda(q) \cos(2l t) \\ g(t) = sse_{2n+1}^\Lambda(t, q) = (\cos^2(t))^{\frac{\Lambda}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} B_{2l+1}^\Lambda(q) \sin((2l + 1)t) \\ g(t) = sse_{2n+2}^\Lambda(t, q) = (\cos^2(t))^{\frac{1-\Lambda}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} B_{2l+1}^{1-\Lambda}(q) \sin((2l + 1)t) \\ g(t) = sce_{2n+1}^\Lambda(t, q) = (\cos^2(t))^{\frac{1-\Lambda}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l}^{1-\Lambda}(q) \cos((2l + 1)t) \end{cases}$$

Là encore lorsque $\Lambda=0$, les développements sont effectivement d'une forme équivalente aux 4 types de solutions périodiques de l'équation de Mathieu :

$$\begin{cases} \Lambda = 0 \\ \Rightarrow g''(t) + (a - 2q \cos(2t)) g(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sce_{2n}^0(t, q) = ce_{2n}(t, q) = \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l}^0(q) \cos(2l t) \\ sse_{2n+1}^0(t, q) = se_{2n+1}(t, q) = \sum_{l=0}^{l=+\infty} B_{2l+1}^0(q) \sin((2l + 1)t) \\ sse_{2n+2}^0(t, q) = se_{2n+2}(t, q) = \cos(t) \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l+1}^1(q) \sin((2l + 1)t) = \sum_{l=0}^{l=+\infty} B_{2l+2}(q) \sin((2l + 2)t) \\ sce_{2n+1}^0(t, q) = ce_{2n+1}(t, q) = \cos(t) \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l}^1(q) \cos(2l t) = \sum_{l=0}^{l=+\infty} B_{2l+1}(q) \cos((2l + 1)t) \end{cases}$$

Quant aux solutions de l'équation $g''(t) + \left(a + 2q \cos(2t) - \frac{\Lambda(\Lambda-1)}{\sin^2(t)} \right) g(t) = 0$, la correspondance avec les fonctions de Mathieu est également obtenue lorsque $\Lambda=0$, sous la forme matricielle qui est exactement celle des fonctions de Mathieu, notamment pour les ordres impairs :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (1+\Lambda)^2 & -q-(3-\Lambda)^2 & q & 0 & \dots & 0 \\ -q & q+(3+\Lambda)^2 & -q-(5-\Lambda)^2 & q & \dots & \dots \\ 0 & -q & q+(5+\Lambda)^2 & -q-(7-\Lambda)^2 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & -q & \dots & -q-(2l+1-\Lambda)^2 & 0 \\ \dots & \dots & 0 & -q & q+(2l+1+\Lambda)^2 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \\ \Lambda = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \mathbf{B}^{-1}\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1-q & -q & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -q & 9 & -q & 0 & \dots & \dots \\ 0 & -q & 27 & q & 0 & \dots \\ \dots & 0 & -q & \dots & q & 0 \\ \dots & \dots & 0 & -q & (2l+1)^2 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Et pour les ordres pairs :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q+\Lambda^2 & -2q-(2-\Lambda)^2 & q & 0 & \dots & 0 \\ -q & q+(2+\Lambda)^2 & -q-(4-\Lambda)^2 & q & \dots & \dots \\ 0 & -q & q+(4+\Lambda)^2 & -q-(6-\Lambda)^2 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & -q & \dots & -q-(2l-\Lambda)^2 & 0 \\ \dots & \dots & 0 & -q & q+(2l+\Lambda)^2 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \\ \Lambda = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \mathbf{B}^{-1}\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & -2q & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -q & 4 & -q & 0 & \dots & \dots \\ 0 & -q & 16 & -q & 0 & \dots \\ \dots & 0 & -q & \dots & -q & 0 \\ \dots & \dots & 0 & -q & (2l)^2 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Voyons si l'on peut directement construire pour l'équation différentielle intermédiaire :

$$u''(t) + 2\Lambda \cotan(t) u'(t) + (a - \Lambda^2 + 2q \cos(2t)) u(t) = 0$$

des développements possibles à la manière des fonctions de Mathieu, sous la forme $\sum_{l=0}^{l=+\infty} B_{2l+1}^\Lambda \sin((2l+1)t)$ ou sous la forme $\sum_{l=0}^{l=+\infty} B_{2l+1}^\Lambda \sin((2l)t)$. Pour $t=0$, ces deux développements s'annulent, ainsi bien évidemment que leurs dérivées secondes. Les dérivées premières sont a priori non nulle. Si nous injectons ce résultat dans l'équation différentielle alors :

$$u''(t) + 2\Lambda \cotan(t) u'(t) + (a - \Lambda^2 + 2q \cos(2t)) u(t) \Big|_{t=0} = 2\Lambda \cotan(t) u'(t) \Big|_{t=0} = 0$$

Comme $\Lambda > 0$ (sauf pour les fonctions de Mathieu) alors la solution ne peut qu'être identiquement nulle.

De même avec l'équation différentielle $u''(t) - 2\Lambda \tan(t) u'(t) + (a - \Lambda^2 - 2q \cos(2t)) u(t) = 0$ par simple changement d'argument, on en déduit qu'il n'est pas possible de construire des solutions de la forme $\sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l+1}^\Lambda \cos((2l+1)t)$ ou de la forme $\sum_{l=0}^{l=+\infty} B_{2l+1}^\Lambda \sin((2l)t)$ excepté dans le cas des fonctions de Mathieu, soit lorsque $\Lambda=0$.

Cas limite $\gamma \rightarrow 0$ pour $\mu+\lambda$ entier

On sait que dans ce cas l'équation des ondes hyper-sphéroïdales se ramène à l'équation différentielle des fonctions de Gegenbauer associées. La forme de Liouville permet d'appréhender les solutions lorsque $\mu+\lambda$ est entier :

$$\begin{aligned} (1-x^2) \frac{d^2 y(x)}{dx^2} - (1+2\lambda)x \frac{dy(x)}{dx} + \left(\nu(\nu+2\lambda) - \frac{\mu(\mu+2\lambda-1)}{1-x^2} \right) y(x) &= 0 \quad \Lambda = 1 - \mu - \lambda \quad x = \cos(t) \\ y(x) = C_\nu^{\lambda, \mu}(x) = (1-x^2)^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} u(t) = (\sin^2(t))^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} u(t) \\ \begin{cases} u''(t) + 2\Lambda \cotan(t) u'(t) + ((\nu+\lambda)^2 - \Lambda^2) u(t) = 0 \\ u''(t) + 2(1-\mu-\lambda) \cotan(t) u'(t) + (\nu+1-\mu)(\nu+\mu+2\lambda-1) u(t) = 0 \end{cases} &\begin{cases} \mu+\lambda = n \Rightarrow \Lambda = 1 - \mu - \lambda = 1 - n \\ a = (\nu+\lambda)^2 \end{cases} \end{aligned}$$

On a donc à notre disposition toutes les solutions de cette équation, sous la forme de fonctions de Gegenbauer associées de paramètre $\lambda+\mu=n$ entier et son développement sous une forme finie

$u(t) = \sum_{l=0}^{l=n-1} A_l^n \cos((\nu+\lambda+2l-(n-1))t)$. Dans notre cas les paramètres ν et λ sont également reliés par la relation $\nu+\lambda$ est un entier, aussi des développements du type $u(t) = \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} B_{2l+1}^\lambda \cos((2\tilde{l}+1)t)$ ou

$u(t) = \sum_{\tilde{l}=-\infty}^{\tilde{l}=+\infty} B_{2\tilde{l}}^\lambda \cos(2\tilde{l}t)$ sont équivalents en posant :

$$\text{Impair} \quad \begin{cases} 2\tilde{l}+1 = \nu+\lambda+2l-n+1 \\ \tilde{l} = l + \frac{\nu+\lambda-n}{2} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \text{pair} \quad \begin{cases} 2\tilde{l} = \nu+\lambda+2l-n+1 \\ \tilde{l} = l + \frac{\nu+\lambda-n+1}{2} \end{cases}$$

Lorsque $q=0$, La récurrence des coefficients du développement devient :

$$\begin{cases} q A_{2l-1}^\lambda + (a - (2\tilde{l} + 1 + \Lambda)^2 - q) A_{2l+1}^\lambda + (-a + (\Lambda - 2\tilde{l} - 3)^2 + q) A_{2l+3}^\lambda - q A_{2l+5}^\lambda = 0 \\ q A_{2l-2}^\lambda + (a - (2\tilde{l} + \Lambda)^2 - q) A_{2l}^\lambda + (-a + (\Lambda - 2\tilde{l} - 2)^2 + q) A_{2l+2}^\lambda - q A_{2l+4}^\lambda = 0 \\ \begin{cases} q = 0 \\ a = (v + \lambda)^2 \\ \Lambda = 1 - n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a - (2\tilde{l} + 1 + \Lambda)^2) A_{2l+1}^\lambda + (-a + (\Lambda - 2\tilde{l} - 3)^2) A_{2l+3}^\lambda = 0 \\ (a - (2\tilde{l} + \Lambda)^2) A_{2l}^\lambda + (-a + (\Lambda - 2\tilde{l} - 2)^2) A_{2l+2}^\lambda = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ((v + \lambda)^2 - (2\tilde{l} + 2 - n)^2) A_{2l+1}^\lambda = ((v + \lambda)^2 - (n + 2\tilde{l} + 2)^2) A_{2l+3}^\lambda \\ ((v + \lambda)^2 - (2\tilde{l} + 1 - n)^2) A_{2l}^\lambda = ((v + \lambda)^2 - (n + 2\tilde{l} + 1)^2) A_{2l+2}^\lambda \end{cases}$$

Alors la récurrence des coefficients du développement impair $u(t) = \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} A_{2l+1}^\lambda \cos((2\tilde{l} + 1)t)$ donne :

$$((v + \lambda)^2 - (2\tilde{l} + 2 - n)^2) A_{2l+1}^\lambda = ((v + \lambda)^2 - (n + 2\tilde{l} + 2)^2) A_{2l+3}^\lambda \Leftrightarrow (n - 1 - l)(v - (n - 1) + \lambda + l) A_{2l+1}^\lambda = -(l + 1)(v + \lambda + l + 1) A_{2l+3}^\lambda$$

Et la récurrence pour un développement pair de la forme $u(t) = \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} A_{2l}^\lambda \cos(2l t)$ donne :

$$((v + \lambda)^2 - (2\tilde{l} + 1 - n)^2) A_{2l}^\lambda = ((v + \lambda)^2 - (n + 2\tilde{l} + 1)^2) A_{2l+2}^\lambda \Leftrightarrow (n - 1 - l)(v - (n - 1) + l + \lambda) A_{2l}^\lambda = -(l + 1)(v + l + \lambda + 1) A_{2l+2}^\lambda$$

Ce sont donc les mêmes récurrences d'avec les coefficients du développement des fonctions de Gegenbauer associées de la forme : $C_\nu^{\lambda, n-\lambda}(x)$, à savoir : $\frac{B_{l+1}}{B_l} = -\frac{n-1-l}{l+1} \frac{v+\lambda-(n-1)+l}{v+\lambda+l+1}$.

D'un point de vue matriciel l'équation $u''(t) + 2\Lambda \cotan(t) u'(t) + (a - \Lambda^2) u(t) = 0$ correspond pour $\Leftrightarrow u''(t) + 2(1-n) \cotan(t) u'(t) + (a - (1-n)^2) u(t) = 0$ un développement impair à ce système linéaire :

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (2-n)^2 & -(2+n)^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (4-n)^2 & -(4+n)^2 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & (6-n)^2 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \dots & -(2l+n)^2 & 0 \\ \dots & \dots & 0 & 0 & (2l+2-n)^2 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} - a \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_3 \\ A_5 \\ \dots \\ A_{2l+1} \\ \dots \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} (2-n)^2 - a & -12(n-1) & -20(n-1) & -28(n-1) & \dots & \dots \\ 0 & (4-n)^2 - a & -20(n-1) & -28(n-1) & \dots & \dots \\ 0 & 0 & (6-n)^2 - a & -28(n-1) & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & 0 & (2l+2-n)^2 - a & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_3 \\ A_5 \\ \dots \\ A_{2l+1} \\ \dots \end{bmatrix} = 0$$

Les valeurs propres de ce système sont $a = (2-n)^2, (4-n)^2, (6-n)^2, \dots$

Et pour un développement impair au système linéaire :

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-n)^2 & -(1+n)^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (3-n)^2 & -(3+n)^2 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & (5-n)^2 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \dots & -(2l-1+n)^2 & 0 \\ \dots & \dots & 0 & 0 & (2l+1-n)^2 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} - a \mathbf{I} \right) \begin{bmatrix} A_0 \\ A_2 \\ A_4 \\ \dots \\ A_{2l} \\ \dots \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} (1-n)^2 - a & -8(n-1) & -16(n-1) & -24(n-1) & \dots & \dots \\ 0 & (3-n)^2 - a & -16(n-1) & -24(n-1) & \dots & \dots \\ 0 & 0 & (5-n)^2 - a & -24(n-1) & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & 0 & (2l+1-n)^2 - a & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_2 \\ A_4 \\ \dots \\ A_{2l} \\ \dots \end{bmatrix} = 0$$

Les valeurs propres de ce système sont $a = (1-n)^2, (3-n)^2, (5-n)^2, \dots$.

A chaque fois les premières valeurs propres $(1-n)^2$ et $(2-n)^2$ correspondent à un développement à un seul terme, les deuxièmes valeurs propres $(3-n)^2$ et $(4-n)^2$ à deux termes, les troisièmes valeurs propres $(5-n)^2$ et $(6-n)^2$ à trois termes et ainsi de suite. Or on a vu dans la méthode de construction des fonctions de Gegenbauer associées telles que $\mu+\lambda$ entier que quelque soit la valeur de $n>0$:

- pour $v+\lambda=1-n$ et $v+\lambda=2-n$, le développement ne contient qu'un seul terme non nul . Pour $v+\lambda=1-n$ c'est un développement en cosinus pair et pour $v+\lambda=2-n$ un développement en cosinus impair
- pour $v+\lambda=3-n$ et $v+\lambda=4-n$, le développement contient deux termes non nuls. Pour $v+\lambda=3-n$ c'est un développement en cosinus pair et pour $v+\lambda=4-n$ un développement en cosinus impair
- pour $v+\lambda=5-n$ et $v+\lambda=6-n$, le développement contient trois termes non nuls. Pour $v+\lambda=5-n$ c'est un développement en cosinus pair et pour $v+\lambda=6-n$ un développement en cosinus impair
- et ainsi de suite ...
- pour $n=1$ et $n=0$, le développement n'a qu'un terme.

Il est clair que cette séquence correspond à celle que nous trouvons ici. On peut donc en conclure l'identification des valeurs du degré ν suivant la succession des valeurs propres établies dans le cas des développements pair et impair lorsque $\gamma = 0$ selon la correspondance suivante :

$$\mu + \lambda = n \quad \left\{ \begin{array}{ll} a = (1-n)^2 & \nu + \lambda = 1-n \rightarrow \nu + \mu = 1-2\lambda \rightarrow \text{développement en cosinus pair} \\ a = (2-n)^2 & \nu + \lambda = 2-n \rightarrow \nu + \mu = 2-2\lambda \rightarrow \text{développement en cosinus impair} \\ a = (3-n)^2 & \nu + \lambda = 3-n \rightarrow \nu + \mu = 3-2\lambda \rightarrow \text{développement en cosinus pair} \\ a = (4-n)^2 & \nu + \lambda = 4-n \rightarrow \nu + \mu = 4-2\lambda \rightarrow \text{développement en cosinus impair} \\ a = (5-n)^2 & \nu + \lambda = 5-n \rightarrow \nu + \mu = 5-2\lambda \rightarrow \text{développement en cosinus pair} \\ a = (6-n)^2 & \nu + \lambda = 6-n \rightarrow \nu + \mu = 6-2\lambda \rightarrow \text{développement en cosinus impair} \\ \dots & \end{array} \right.$$

Cette liste de valeurs propres n'étant pas ordonnée de façon croissante (elle comporte certaines valeurs propres de multiplicité double), la correspondance en valeur croissante est la suivante :

$$\mu + \lambda = n \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Valeur } n^{\circ}1 & a = 0 \rightarrow \nu + \mu = 1-2\lambda \quad \text{développement cosinus parité } n-1 \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Valeur } n^{\circ}2 \\ \text{Valeur } n^{\circ}3 \end{array} \right. & a = 1 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nu + \mu = 1-2\lambda + n-2 \\ \nu + \mu = 1-2\lambda + n \end{array} \right. \quad \text{développement cosinus parité } n \\ \dots & \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Valeur } n^{\circ}2n-4 \\ \text{Valeur } n^{\circ}2n-3 \end{array} \right. & a = (n-2)^2 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nu + \mu = 1-2\lambda + 1 \\ \nu + \mu = 1-2\lambda + 2n-3 \end{array} \right. \quad \text{développement cosinus impair} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Valeur } n^{\circ}2n-2 \\ \text{Valeur } n^{\circ}2n-1 \end{array} \right. & a = (n-1)^2 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nu + \mu = 1-2\lambda + 0 \\ \nu + \mu = 1-2\lambda + 2n-2 \end{array} \right. \quad \text{développement cosinus pair} \\ \text{Valeur } n^{\circ}2n & a = (n)^2 \rightarrow \nu + \mu = 1-2\lambda + 2n-1 \quad \text{développement cosinus impair} \\ \text{Valeur } n^{\circ}2n+1 & a = (n+1)^2 \rightarrow \nu + \mu = 1-2\lambda + 2n+1 \quad \text{développement cosinus pair} \\ \dots & \end{array} \right.$$

Pour la normalisation des deux types de fonctions de Mathieu associées,

on peut par exemple étendre la règle de normalisation des fonctions de Mathieu (pour $\Lambda=0$), à savoir que la norme du seul développement de Fourier est normalisé à π :

$$g''(t) + \left(a + 2q \cos(2t) - \frac{\Lambda(\Lambda-1)}{\sin^2(t)} \right) g(t) = 0 \quad \begin{cases} \int_0^{2\pi} dt \left(\sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l}^\Lambda(-q) \cos(2l t) \right)^2 = \pi \Rightarrow 2(A_0^\Lambda(-q))^2 + \sum_{l=0}^{l=+\infty} (A_{2l}^\Lambda(-q))^2 = 1 \\ \int_0^{2\pi} dt \left(\sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l}^\Lambda(-q) \cos((2l+1)t) \right)^2 = \pi \Rightarrow \sum_{l=0}^{l=+\infty} (A_{2l+1}^\Lambda(-q))^2 = 1 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} dt (\sin^2(t))^{-\Lambda} (c c e_{2n}^\Lambda(t, -q))^2 = \int_0^{2\pi} dt (\sin^2(t))^{-\Lambda} (c c e_{2n+1}^\Lambda(t, -q))^2 = \int_0^{2\pi} dt (\sin^2(t))^{-\Lambda-1} (c s e_{2n+2}^\Lambda(t, -q))^2 = \int_0^{2\pi} dt (\sin^2(t))^{-\Lambda-1} (c s e_{2n+1}^\Lambda(t, -q))^2 = \pi$$

Et de même :

$$g''(t) + \left(a - 2q \cos(2t) - \frac{\Lambda(\Lambda-1)}{\cos^2(t)} \right) g(t) = 0 \quad \begin{cases} \int_0^{2\pi} dt \left(\sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l}^\Lambda(q) \cos(2l t) \right)^2 = \pi \Rightarrow 2(A_0^\Lambda(q))^2 + \sum_{l=0}^{l=+\infty} (A_{2l}^\Lambda(q))^2 = 1 \\ \int_0^{2\pi} dt \left(\sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l}^\Lambda(q) \sin((2l+1)t) \right)^2 = \pi \Rightarrow \sum_{l=0}^{l=+\infty} (A_{2l+1}^\Lambda(q))^2 = 1 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} dt (\cos^2(t))^{-\Lambda} (s c e_{2n}^\Lambda(t, q))^2 = \int_0^{2\pi} dt (\cos^2(t))^{-\Lambda} (s c e_{2n+1}^\Lambda(t, q))^2 = \int_0^{2\pi} dt (\cos^2(t))^{-\Lambda-1} (s s e_{2n+2}^\Lambda(t, q))^2 = \int_0^{2\pi} dt (\cos^2(t))^{-\Lambda-1} (s s e_{2n+1}^\Lambda(t, q))^2 = \pi$$

Expression des dérivées premières des fonctions intermédiaires de Mathieu associées

J'appelle les deux fonctions périodiques comportant les seuls développements en cosinus, les fonctions périodiques intermédiaires de Mathieu associées :

$$u''(t) + 2\Lambda \cotan(t) u'(t) + (a - \Lambda^2 + 2q \cos(2t)) u(t) = 0$$

$$\begin{cases} u(t) = c c e_{2n}^\Lambda(t, -q) = \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l}^\Lambda(-q) \cos(2l t) \\ u(t) = c c e_{2n+1}^\Lambda(t, -q) = \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l+1}^\Lambda(-q) \cos((2l+1)t) \end{cases}$$

Les dérivées premières et secondes sont alors triviales :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \{c c e_{2n}^\Lambda(t, -q)\} = - \sum_{l=0}^{l=+\infty} 2l A_{2l}^\Lambda(-q) \sin(2l t) \\ \frac{d^2}{dt^2} \{c c e_{2n}^\Lambda(t, -q)\} = - \sum_{l=0}^{l=+\infty} 4l^2 A_{2l}^\Lambda(-q) \cos(2l t) \\ \frac{d}{dt} \{c c e_{2n+1}^\Lambda(t, -q)\} = - \sum_{l=0}^{l=+\infty} (2l+1) A_{2l+1}^\Lambda(-q) \sin((2l+1)t) \\ \frac{d^2}{dt^2} \{c c e_{2n+1}^\Lambda(t, -q)\} = - \sum_{l=0}^{l=+\infty} (2l+1)^2 A_{2l+1}^\Lambda(-q) \cos((2l+1)t) \end{cases}$$

Expression des solutions périodiques en $\text{Cos}(t)$ de l'équation des ondes hyper-sphéroïdales avec un développement en fonctions de Mathieu intermédiaires associées

Les fonctions d'onde hyper-sphéroïdales sont donc construites comme suit en argument t :

$$\begin{cases} y(t) = (\text{Sin}^2(t))^{-\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l}^{1-\lambda-\mu}(q) \text{Cos}(2l t) \\ y(t) = (\text{Sin}^2(t))^{-\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l+1}^{1-\lambda-\mu}(q) \text{Cos}((2l+1) t) \\ y(t) = (\text{Sin}^2(t))^{\frac{\mu}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l+1}^{\lambda+\mu}(q) \text{Cos}((2l+1) t) \\ y(t) = (\text{Sin}^2(t))^{\frac{\mu}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l}^{\lambda+\mu}(q) \text{Cos}(2l t) \end{cases}$$

Et en argument x :

$$\begin{cases} (1-x^2) \frac{d^2 y(x)}{dx^2} - (1+2\lambda)x \frac{dy(x)}{dx} + \left(\omega + \gamma^2(1-x^2) - \frac{\mu(\mu+2\lambda-1)}{1-x^2} \right) y(x) = 0 \\ x = \text{Cos}(t) \quad \Lambda = 1 - \mu - \lambda \quad q = -\frac{\gamma^2}{4} \quad a = \omega + \lambda^2 + \frac{\gamma^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(x) = (1-x^2)^{-\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l+1}^{1-\lambda-\mu} \left(-\frac{\gamma^2}{4} \right) \text{Cos}((2l+1) \text{ArcCos}(x)) \\ y(x) = (1-x^2)^{-\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l}^{1-\lambda-\mu} \left(-\frac{\gamma^2}{4} \right) \text{Cos}(2l \text{ArcCos}(x)) \\ y(x) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l}^{\lambda+\mu} \left(-\frac{\gamma^2}{4} \right) \text{Cos}(2l \text{ArcCos}(x)) \\ y(x) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l+1}^{\lambda+\mu} \left(-\frac{\gamma^2}{4} \right) \text{Cos}((2l+1) \text{ArcCos}(x)) \end{cases}$$

Soit avec les fonctions de Mathieu associées intermédiaires :

$$\begin{cases} y(x) = (1-x^2)^{-\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} ccei_{2n}^{1-\lambda-\mu} \left(\text{ArcCos}(x), -\frac{\gamma^2}{4} \right) \\ y(x) = (1-x^2)^{-\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} ccei_{2n+1}^{1-\lambda-\mu} \left(\text{ArcCos}(x), -\frac{\gamma^2}{4} \right) \\ y(x) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} ccei_{2n}^{\lambda+\mu} \left(\text{ArcCos}(x), -\frac{\gamma^2}{4} \right) \\ y(x) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} ccei_{2n+1}^{\lambda+\mu} \left(\text{ArcCos}(x), -\frac{\gamma^2}{4} \right) \end{cases}$$

Ce qui donne les dérivées premières :

$$\begin{cases} y'(x) = -(1-x^2)^{-\frac{\mu+2\lambda}{2}} \frac{d}{dt} \left\{ ccei_{2n}^{1-\lambda-\mu} \left(t, -\frac{\gamma^2}{4} \right) \right\} \Big|_{t=\text{ArcCos}(x)} + (\mu+2\lambda-1)x(1-x^2)^{-\frac{\mu+2\lambda+1}{2}} ccei_{2n}^{1-\lambda-\mu} \left(\text{ArcCos}(x), -\frac{\gamma^2}{4} \right) \\ y'(x) = -(1-x^2)^{-\frac{\mu+2\lambda}{2}} \frac{d}{dt} \left\{ ccei_{2n+1}^{1-\lambda-\mu} \left(t, -\frac{\gamma^2}{4} \right) \right\} \Big|_{t=\text{ArcCos}(x)} + (\mu+2\lambda-1)x(1-x^2)^{-\frac{\mu+2\lambda+1}{2}} ccei_{2n+1}^{1-\lambda-\mu} \left(\text{ArcCos}(x), -\frac{\gamma^2}{4} \right) \\ y'(x) = -(1-x^2)^{\frac{\mu-1}{2}} \frac{d}{dt} \left\{ ccei_{2n}^{\lambda+\mu} \left(t, -\frac{\gamma^2}{4} \right) \right\} \Big|_{t=\text{ArcCos}(x)} - \mu x(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}-1} ccei_{2n}^{\lambda+\mu} \left(\text{ArcCos}(x), -\frac{\gamma^2}{4} \right) \\ y'(x) = -(1-x^2)^{\frac{\mu-1}{2}} \frac{d}{dt} \left\{ ccei_{2n+1}^{\lambda+\mu} \left(t, -\frac{\gamma^2}{4} \right) \right\} \Big|_{t=\text{ArcCos}(x)} - \mu x(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}-1} ccei_{2n+1}^{\lambda+\mu} \left(\text{ArcCos}(x), -\frac{\gamma^2}{4} \right) \end{cases}$$

Et les dérivées secondes :

$$\begin{cases} y''(x) = (1-x^2)^{\frac{\mu+2\lambda+1}{2}} \frac{d^2}{dt^2} \left\{ ccei_{2n}^{1-\lambda-\mu} \left(t, -\frac{\gamma^2}{4} \right) \right\} \Big|_{t=\text{ArcCos}(x)} - x(2\mu+4\lambda-1)(1-x^2)^{\frac{\mu+2\lambda+2}{2}} \frac{d}{dt} \left\{ ccei_{2n}^{1-\lambda-\mu} \left(t, -\frac{\gamma^2}{4} \right) \right\} \Big|_{t=\text{ArcCos}(x)} + (\mu+2\lambda-1)(x^2(\mu+2\lambda)+1)(1-x^2)^{\frac{\mu+2\lambda+3}{2}} ccei_{2n}^{1-\lambda-\mu} \left(\text{ArcCos}(x), -\frac{\gamma^2}{4} \right) \\ y''(x) = (1-x^2)^{\frac{\mu+2\lambda+1}{2}} \frac{d^2}{dt^2} \left\{ ccei_{2n+1}^{1-\lambda-\mu} \left(t, -\frac{\gamma^2}{4} \right) \right\} \Big|_{t=\text{ArcCos}(x)} - x(2\mu+4\lambda-1)(1-x^2)^{\frac{\mu+2\lambda+2}{2}} \frac{d}{dt} \left\{ ccei_{2n+1}^{1-\lambda-\mu} \left(t, -\frac{\gamma^2}{4} \right) \right\} \Big|_{t=\text{ArcCos}(x)} + (\mu+2\lambda-1)(x^2(\mu+2\lambda)+1)(1-x^2)^{\frac{\mu+2\lambda+3}{2}} ccei_{2n+1}^{1-\lambda-\mu} \left(\text{ArcCos}(x), -\frac{\gamma^2}{4} \right) \\ y''(x) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} \frac{d^2}{dt^2} \left\{ ccei_{2n}^{i+\mu} \left(t, -\frac{\gamma^2}{4} \right) \right\} \Big|_{t=\text{ArcCos}(x)} - x(1-2\mu)(1-x^2)^{\frac{\mu-3}{2}} \frac{d}{dt} \left\{ ccei_{2n}^{i+\mu} \left(t, -\frac{\gamma^2}{4} \right) \right\} \Big|_{t=\text{ArcCos}(x)} + \mu(x^2(\mu-1)-1)(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} ccei_{2n}^{i+\mu} \left(\text{ArcCos}(x), -\frac{\gamma^2}{4} \right) \\ y''(x) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} \frac{d^2}{dt^2} \left\{ ccei_{2n+1}^{i+\mu} \left(t, -\frac{\gamma^2}{4} \right) \right\} \Big|_{t=\text{ArcCos}(x)} - x(1-2\mu)(1-x^2)^{\frac{\mu-3}{2}} \frac{d}{dt} \left\{ ccei_{2n+1}^{i+\mu} \left(t, -\frac{\gamma^2}{4} \right) \right\} \Big|_{t=\text{ArcCos}(x)} + \mu(x^2(\mu-1)-1)(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} ccei_{2n+1}^{i+\mu} \left(\text{ArcCos}(x), -\frac{\gamma^2}{4} \right) \end{cases}$$

Expression des solutions périodiques en Cos(t) de l'équation des ondes hyper-sphéroïdales avec un développement en polynômes de Chebychev en x

En introduisant dans les expressions précédentes les polynômes de Chebychev de première espèce, on obtient un développement particulier des solutions de l'équation des ondes sphéroïdales. Ils sont définis comme suit :

$$\begin{cases} x = \text{Cos}(t) \\ T_n(x) = \text{Cos}(nt) = \text{Cos}(n \text{ArcCos}(x)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(x) = (1-x^2)^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l+1}^{1-\lambda-\mu} \left(-\frac{\gamma^2}{4} \right) T_{2l+1}(x) \\ y(x) = (1-x^2)^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l}^{1-\lambda-\mu} \left(-\frac{\gamma^2}{4} \right) T_{2l}(x) \\ y(x) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l}^{\mu+\lambda} \left(-\frac{\gamma^2}{4} \right) T_{2l}(x) \\ y(x) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l+1}^{\mu+\lambda} \left(-\frac{\gamma^2}{4} \right) T_{2l+1}(x) \end{cases}$$

Avec ces expressions les dérivées premières sont alors les suivantes :

$$\begin{cases} y'(x) = (1-x^2)^{\frac{\mu+2\lambda+1}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l+1}^{1-\lambda-\mu} \left(-\frac{\gamma^2}{4} \right) \{ (2l+1)(1-x^2) U_{2l}(x) + x(\mu+2\lambda-1) T_{2l+1}(x) \} \\ y'(x) = (1-x^2)^{\frac{\mu+2\lambda+1}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l}^{1-\lambda-\mu} \left(-\frac{\gamma^2}{4} \right) \{ 2l(1-x^2) U_{2l-1}(x) + x(\mu+2\lambda-1) T_{2l}(x) \} \\ y'(x) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l}^{\mu+\lambda} \left(-\frac{\gamma^2}{4} \right) \{ 2l(1-x^2) U_{2l-1}(x) - x\mu T_{2l}(x) \} \\ y'(x) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l+1}^{\mu+\lambda} \left(-\frac{\gamma^2}{4} \right) \{ (2l+1)(1-x^2) U_{2l}(x) - x\mu T_{2l+1}(x) \} \end{cases}$$

Et les dérivées secondes :

$$\begin{cases} y''(x) = (1-x^2)^{\frac{\mu+2\lambda+3}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l+1}^{\frac{1}{2}-\mu} \left(-\frac{\gamma^2}{4} \right) \{ (\mu+2\lambda-1)(x^2(\mu+2\lambda)+1) T_{2l+1}(x) - 2x(1-x^2)(k-\mu-2\lambda+1)(2l+1) U_{2l}(x) + (2l+1)^2(1-x^2) U_{2l-1}(x) \} \\ y''(x) = (1-x^2)^{\frac{\mu+2\lambda+3}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l}^{\frac{1}{2}-\mu} \left(-\frac{\gamma^2}{4} \right) \{ (\mu+2\lambda-1)(x^2(\mu+2\lambda)+1) T_{2l}(x) - 2x l(1-x^2)(2k-2\mu-4\lambda+1) U_{2l-1}(x) + 4l^2(1-x^2) U_{2l-2}(x) \} \\ y''(x) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l}^{\mu+\frac{1}{2}} \left(-\frac{\gamma^2}{4} \right) \{ \mu(x^2(\mu-1)-1) T_{2l}(x) - 2x l(1-x^2)(2\mu+2k-1) U_{2l-1}(x) + 4l^2(1-x^2) U_{2l-2}(x) \} \\ y''(x) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l+1}^{\mu+\frac{1}{2}} \left(-\frac{\gamma^2}{4} \right) \{ \mu(x^2(\mu-1)-1) T_{2l+1}(x) - 2x(1-x^2)(\mu+k)(2l+1) U_{2l}(x) + (2l+1)^2(1-x^2) U_{2l-1}(x) \} \end{cases}$$

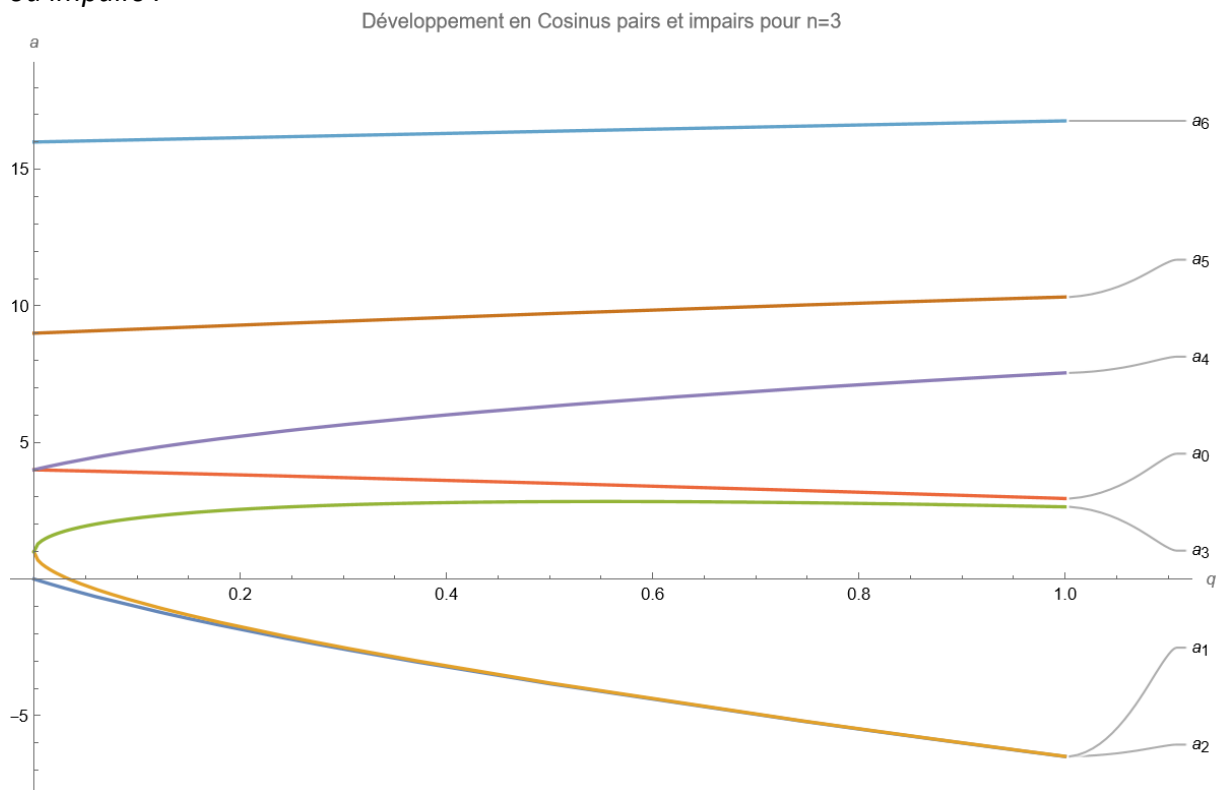
Indexation des solutions périodiques en $\cos(t)$ de l'équation des ondes hyper-sphéroïdales : valeur des paramètres tels que $\mu+\lambda$ et $\nu+\lambda$ soient entiers

Revenons maintenant à nos moutons, soit les solutions de l'équation des ondes sphéroïdales pour les paramètres $\mu+\lambda$ et $\nu+\lambda$ soient entiers. Telles que ces solutions ont été construites, il est clair que le paramètre $\nu+\lambda$ est une forme d'indexation des valeurs propres dans l'ordre croissant. Or on a vu que pour la valeur $\gamma=0$, l'indexation des valeurs propres a ordonnée en valeur croissante était définie par la correspondance :

$$\mu + \lambda = n \quad \nu + \lambda = l \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Valeur } n^{\circ}1 \quad a=0 \rightarrow \nu + \mu = 1 - 2\lambda \quad \text{développement cosinus parité } n-1 \\ \text{Valeur } n^{\circ}2 \quad a=1 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nu + \mu = 1 - 2\lambda + n - 2 \\ \nu + \mu = 1 - 2\lambda + n \end{array} \right. \quad \text{développement cosinus parité } n \\ \text{Valeur } n^{\circ}3 \\ \dots \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Valeur } n^{\circ}2n-4 \\ \text{Valeur } n^{\circ}2n-3 \end{array} \right. \quad a=(n-2)^2 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nu + \mu = 1 - 2\lambda + 1 \\ \nu + \mu = 1 - 2\lambda + 2n - 3 \end{array} \right. \quad \text{développement cosinus impair} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Valeur } n^{\circ}2n-2 \\ \text{Valeur } n^{\circ}2n-1 \end{array} \right. \quad a=(n-1)^2 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nu + \mu = 1 - 2\lambda + 0 \\ \nu + \mu = 1 - 2\lambda + 2n - 2 \end{array} \right. \quad \text{développement cosinus pair} \\ \text{Valeur } n^{\circ}2n \quad a=(n)^2 \rightarrow \nu + \mu = 1 - 2\lambda + 2n - 1 \quad \text{développement cosinus impair} \\ \text{Valeur } n^{\circ}2n+1 \quad a=(n+1)^2 \rightarrow \nu + \mu = 1 - 2\lambda + 2n + 1 \quad \text{développement cosinus pair} \\ \dots \end{array} \right.$$

Dès lors que la dépendance des valeurs propres a est continue suivant le paramètre q (construit avec γ), **la correspondance pourrait être étendue entre les valeurs ordonnées a dans l'équation de Mathieu associée et les valeurs discrètes de $\nu+\mu$** . Cette fois les valeurs propres ne sont plus multiples lorsque $q>0$. Les valeurs discrètes de $\nu+\mu$ peuvent alors servir d'indexation de la valeur propre $a_{\nu+\mu}$.

Voici un exemple de dépendance en q (construit avec γ) lorsque $\mu+\lambda=n$ avec $n=3$ et pour les 7 premières valeurs propres a ordonnées de façon croissante d'un développement en cosinus pairs ou impairs :



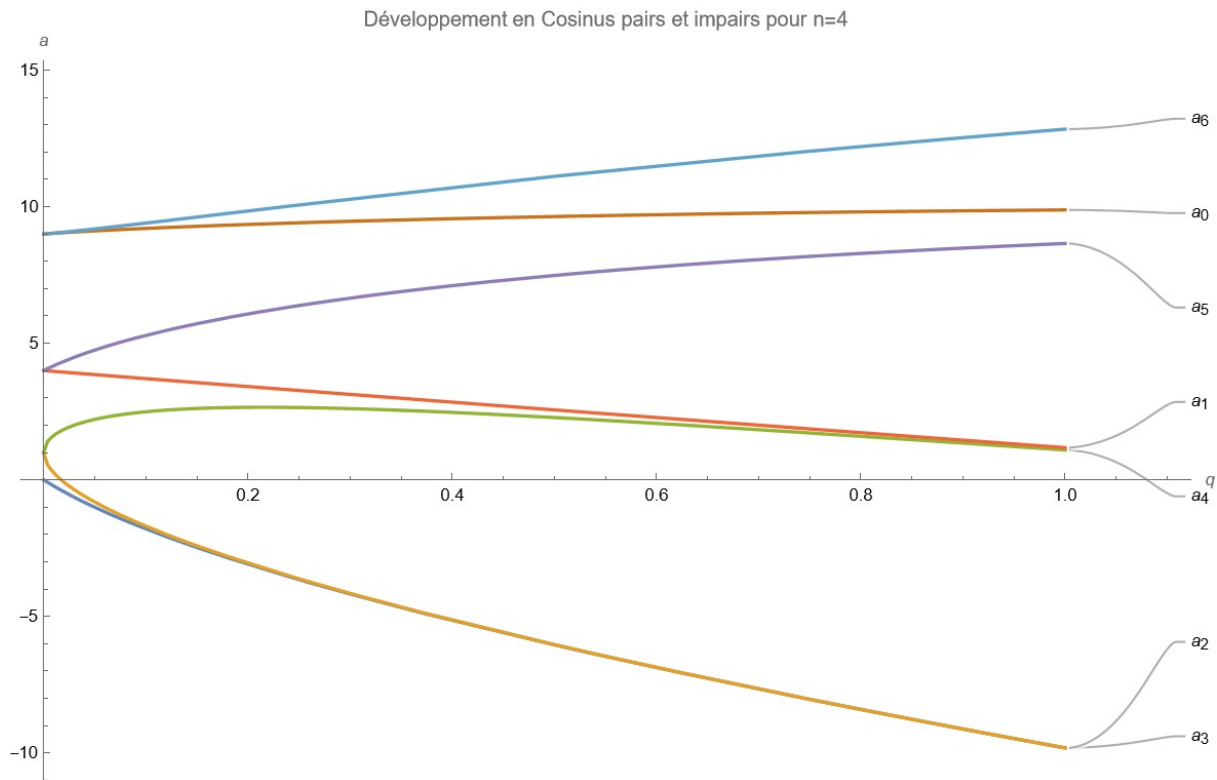
On remarque bien les cas de multiplicité double lorsque $q=\gamma=0$.

Pour l'indexation on respecte le schéma suivant avec $n=3$:

Valeur	$n^{\circ}1 \rightarrow \nu + \mu = 2 + 1 - 2\lambda$	\rightarrow	valeur propre a_2	développement cosinus pairs
Valeur	$n^{\circ}2 \rightarrow \nu + \mu = 1 + 1 - 2\lambda$	\rightarrow	valeur propre a_1	développement cosinus impairs
Valeur	$n^{\circ}3 \rightarrow \nu + \mu = 3 + 1 - 2\lambda$	\rightarrow	valeur propre a_3	développement cosinus impairs
Valeur	$n^{\circ}4 \rightarrow \nu + \mu = 0 + 1 - 2\lambda$	\rightarrow	valeur propre a_0	développement cosinus pairs
Valeur	$n^{\circ}5 \rightarrow \nu + \mu = 4 + 1 - 2\lambda$	\rightarrow	valeur propre a_4	développement cosinus pairs
Valeur	$n^{\circ}6 \rightarrow \nu + \mu = 5 + 1 - 2\lambda$	\rightarrow	valeur propre a_5	développement cosinus impairs
Valeur	$n^{\circ}7 \rightarrow \nu + \mu = 6 + 1 - 2\lambda$	\rightarrow	valeur propre a_6	développement cosinus pairs
...				

A partir des valeurs propres $n^{\circ}6$ et $n^{\circ}7$ toutes ces dernières sont de multiplicité simple lorsque $q=\gamma=0$, soit à partir des $2n$ valeurs propres.

Voici un exemple de dépendance en q (construit avec γ) lorsque $\mu + \lambda = n$ avec $n=4$ et pour les 7 premières valeurs propres a ordonnées de façon croissante d'un développement en cosinus pairs ou impairs :



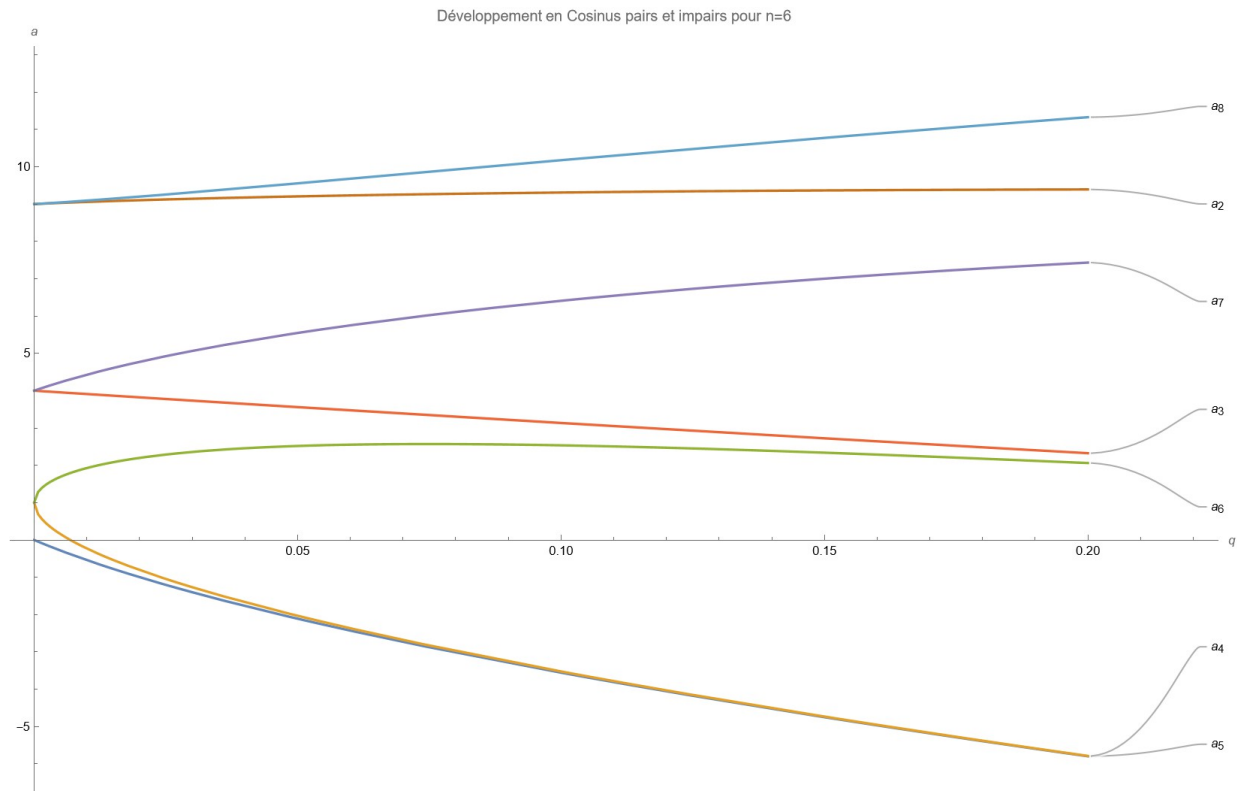
On remarque bien les cas de multiplicité double lorsque $q=\gamma=0$.

Pour l'indexation on respecte le schéma suivant avec $n=4$:

$$\begin{cases}
 \text{Valeur } n^{\circ}1 \rightarrow \nu + \mu = 3 + 1 - 2\lambda \rightarrow \text{valeur propre } a_3 & \text{développement cosinus impairs} \\
 \text{Valeur } n^{\circ}2 \rightarrow \nu + \mu = 2 + 1 - 2\lambda \rightarrow \text{valeur propre } a_2 & \text{développement cosinus pairs} \\
 \text{Valeur } n^{\circ}3 \rightarrow \nu + \mu = 4 + 1 - 2\lambda \rightarrow \text{valeur propre } a_4 & \text{développement cosinus pairs} \\
 \text{Valeur } n^{\circ}4 \rightarrow \nu + \mu = 1 + 1 - 2\lambda \rightarrow \text{valeur propre } a_1 & \text{développement cosinus impairs} \\
 \text{Valeur } n^{\circ}5 \rightarrow \nu + \mu = 5 + 1 - 2\lambda \rightarrow \text{valeur propre } a_5 & \text{développement cosinus impairs} \\
 \text{Valeur } n^{\circ}6 \rightarrow \nu + \mu = 0 + 1 - 2\lambda \rightarrow \text{valeur propre } a_0 & \text{développement cosinus pairs} \\
 \text{Valeur } n^{\circ}7 \rightarrow \nu + \mu = 6 + 1 - 2\lambda \rightarrow \text{valeur propre } a_6 & \text{développement cosinus pairs} \\
 \dots
 \end{cases}$$

A partir des valeurs propres $n^{\circ}8$ et $n^{\circ}9$ toutes ces dernières sont de multiplicité simple lorsque $q=\gamma=0$, soit à partir des $2n$ valeurs propres.

Voici un exemple de dépendance en q (construit avec γ) lorsque $\mu + \lambda = n$ avec $n=6$ et pour les 7 premières valeurs propres a ordonnées de façon croissante d'un développement en cosinus pairs ou impairs :



On remarque encore bien les cas de multiplicité double lorsque $q=\gamma=0$.

Pour l'indexation on respecte le schéma suivant avec $n=6$:

Valeur	$n^{\circ}1 \rightarrow \nu + \mu = 5 + 1 - 2\lambda$	\rightarrow	valeur propre a_5	développement cosinus impairs
Valeur	$n^{\circ}2 \rightarrow \nu + \mu = 4 + 1 - 2\lambda$	\rightarrow	valeur propre a_4	développement cosinus pairs
Valeur	$n^{\circ}3 \rightarrow \nu + \mu = 6 + 1 - 2\lambda$	\rightarrow	valeur propre a_6	développement cosinus pairs
Valeur	$n^{\circ}4 \rightarrow \nu + \mu = 3 + 1 - 2\lambda$	\rightarrow	valeur propre a_3	développement cosinus impairs
Valeur	$n^{\circ}5 \rightarrow \nu + \mu = 7 + 1 - 2\lambda$	\rightarrow	valeur propre a_7	développement cosinus impairs
Valeur	$n^{\circ}6 \rightarrow \nu + \mu = 2 + 1 - 2\lambda$	\rightarrow	valeur propre a_2	développement cosinus pairs
Valeur	$n^{\circ}7 \rightarrow \nu + \mu = 8 + 1 - 2\lambda$	\rightarrow	valeur propre a_8	développement cosinus pairs
...				

A partir des valeurs propres $n^{\circ}12$ et $n^{\circ}13$ toutes ces dernières sont de multiplicité simple lorsque $q=\gamma=0$, soit à partir des $2n$ valeurs propres.

Développement direct des solutions périodiques de l'équation de Mathieu associée (forme $x=\cos(t)$), en fonctions sinusoïdales

On peut également rechercher des solutions périodiques de l'équation différentielle de Mathieu associée $g''(t) + \left(a - 2q \cos(2t) - \frac{\Lambda(\Lambda-1)}{\sin^2(t)} \right) g(t) = 0$, en injectant directement des développements en fonctions sinusoïdales. Plus précisément sous les diverses formes suivantes, cela conduit à des récurrence à 5 termes :

Développement en fonctions de Cosinus pairs (forme $x=\cos(t)$)

$$g(t) = (\sin^2(t))^{\frac{\Lambda}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l} \cos(2l t)$$

$$\begin{cases} \alpha_l A_{2l-4} + (\beta_l - \chi_l^{-1} a) A_{2l-2} + (\gamma_l - \chi_l^0 a) A_{2l} + (\delta_l - \chi_l^{+1} a) A_{2l+2} + \varepsilon_l A_{2l+4} = 0 \\ \alpha_l = \varepsilon_l = -\frac{q}{2} \quad \chi_l^{-1} = \chi_l^{+1} = -\frac{1}{2} \quad \chi_l^0 = 1 \\ \beta_l = \frac{1}{2} (2q - (2l - 2 + \Lambda)^2) \quad \gamma_l = 4l^2 - q + \Lambda^2 \quad \delta_l = \frac{1}{2} (2q - (2l + 2 - \Lambda)^2) \\ l = 0 \rightarrow (\gamma_0 - \chi_0^0 a) A_0 + (\delta_0 - \chi_0^{+1} a) A_2 + \varepsilon_0 A_4 = 0 \quad \gamma_0 = \frac{1}{2} (\Lambda^2 - q) \quad \chi_0^0 = \frac{1}{2} \\ l = 1 \rightarrow (\beta_1 - \chi_1^{-1} a) A_0 + (\gamma_1 - \chi_1^0 a) A_2 + (\delta_1 - \chi_1^{+1} a) A_4 + \varepsilon_1 A_6 = 0 \quad \gamma_1 = 4 - \frac{3}{2} q + \Lambda^2 \end{cases}$$

En introduisant **M** une matrice penta-diagonale et **C** une matrice tri-diagonale, le système d'équations linéaires devient le suivant :

$$\begin{pmatrix} \gamma_0 & \delta_0 & \varepsilon_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 & \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 & \varepsilon_2 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 & \varepsilon_3 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} \chi_0^0 & \chi_0^{+1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \chi_1^{-1} & \chi_1^0 & \chi_1^{+1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \chi_2^{-1} & \chi_2^0 & \chi_2^{+1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \chi_3^{-1} & \chi_3^0 & \chi_3^{+1} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_2 \\ A_4 \\ A_6 \\ \dots \\ A_{2l} \\ \dots \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{M} - a \mathbf{C}) \mathbf{A} = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{C}^{-1} \mathbf{M} - a \mathbf{I}) \mathbf{A} = 0$$

On voit donc qu'il s'agit d'un problème de détermination des valeurs et de vecteurs propres de la matrice $\mathbf{C}^{-1} \mathbf{M}$. Les coefficients du développement sont les vecteurs propres calculés à partir des valeurs propres déterminées par diagonalisation.

Développement en fonctions de Cosinus impairs (forme $x=\cos(t)$)

$$g(t) = (\sin^2(t))^{\frac{\Lambda}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l+1} \cos((2l+1)t)$$

$$\begin{cases} \alpha_l A_{2l-3} + (\beta_l - \chi_l^{-1} a) A_{2l-1} + (\gamma_l - \chi_l^0 a) A_{2l+1} + (\delta_l - \chi_l^{+1} a) A_{2l+3} + \varepsilon_l A_{2l+5} = 0 \\ \alpha_l = \varepsilon_l = -\frac{q}{2} \quad \chi_l^{-1} = \chi_l^{+1} = -\frac{1}{2} \quad \chi_l^0 = 1 \\ \beta_l = \frac{1}{2} (2q - (2l - 1 + \Lambda)^2) \quad \gamma_l = (2l + 1)^2 - q + \Lambda^2 \quad \delta_l = \frac{1}{2} (2q - (2l + 3 - \Lambda)^2) \\ l = 0 \rightarrow (\gamma_0 - \chi_0^0 a) A_1 + (\delta_0 - \chi_0^{+1} a) A_3 + \varepsilon_0 A_5 = 0 \quad \gamma_0 = \frac{1}{2} (1 + \Lambda)^2 \quad \delta_0 = \frac{1}{2} (q - (3 - \Lambda)^2) \quad \chi_0^0 = \frac{1}{2} \\ l = 1 \rightarrow (\beta_1 - \chi_1^{-1} a) A_1 + (\gamma_1 - \chi_1^0 a) A_3 + (\delta_1 - \chi_1^{+1} a) A_5 + \varepsilon_1 A_7 = 0 \quad \beta_1 = \frac{1}{2} (q - (1 + \Lambda)^2) \end{cases}$$

En introduisant **M** une matrice penta-diagonale et **B** une matrice tri-diagonale, le système d'équations linéaires devient le suivant :

$$\begin{pmatrix} \gamma_0 & \delta_0 & \varepsilon_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 & \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 & \varepsilon_2 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 & \varepsilon_3 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} \chi_0^0 & \chi_0^{+1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \chi_1^{-1} & \chi_1^0 & \chi_1^0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \chi_2^{-1} & \chi_2^0 & \chi_2^{+1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \chi_3^{-1} & \chi_3^0 & \chi_3^{+1} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_3 \\ A_5 \\ A_7 \\ \dots \\ A_{2l+1} \\ \dots \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{M} - a \mathbf{C}) \mathbf{A} = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{C}^{-1} \mathbf{M} - a \mathbf{I}) \mathbf{A} = 0$$

On voit donc qu'il s'agit d'un problème de détermination des valeurs et de vecteurs propres de la matrice $\mathbf{C}^{-1} \mathbf{M}$. Les coefficients du développement sont les vecteurs propres calculés à partir des valeurs propres déterminées par diagonalisation.

Développement en fonctions de sinus pairs (forme $x = \cos(t)$)

$$g(t) = (\sin^2(t))^{\frac{\Lambda}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} B_{2l+2} \sin((2l+2)t)$$

$$\begin{cases} \alpha_l B_{2l-2} + (\beta_l - \chi_l^{-1} a) B_{2l} + (\gamma_l - \chi_l^0 a) B_{2l+2} + (\delta_l - \chi_l^{+1} a) B_{2l+4} + \varepsilon_l B_{2l+6} = 0 \\ \alpha_l = \varepsilon_l = -\frac{q}{2} \quad \chi_l^{-1} = \chi_l^{+1} = -\frac{1}{2} \quad \chi_l^0 = 1 \\ \beta_l = \frac{1}{2} (2q - (2l - \Lambda)^2) \quad \gamma_l = 4(l+1)^2 - q + \Lambda^2 - 4\Lambda \quad \delta_l = \frac{1}{2} (2q - (2l + 4 + \Lambda)^2) \\ l=0 \rightarrow (\gamma_0 - \chi_0^0 a) B_2 + (\delta_0 - \chi_0^{+1} a) B_4 + \varepsilon_0 B_6 = 0 \quad \gamma_0 = (\Lambda - 2)^2 - \frac{q}{2} \end{cases}$$

En introduisant **M** une matrice penta-diagonale et **C** une matrice tri-diagonale, le système d'équations linéaires devient le suivant :

$$\begin{pmatrix} \gamma_0 & \delta_0 & \varepsilon_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 & \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 & \varepsilon_2 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 & \varepsilon_3 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} \chi_0^0 & \chi_0^{+1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \chi_1^{-1} & \chi_1^0 & \chi_1^0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \chi_2^{-1} & \chi_2^0 & \chi_2^{+1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \chi_3^{-1} & \chi_3^0 & \chi_3^{+1} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_2 \\ B_4 \\ B_6 \\ B_8 \\ \dots \\ B_{2l+2} \\ \dots \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{M} - a \mathbf{C}) \mathbf{B} = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{C}^{-1} \mathbf{M} - a \mathbf{I}) \mathbf{B} = 0$$

On voit donc qu'il s'agit d'un problème de détermination des valeurs et de vecteurs propres de la matrice $\mathbf{C}^{-1} \mathbf{M}$. Les coefficients du développement sont les vecteurs propres calculés à partir des valeurs propres déterminées par diagonalisation.

Développement en fonctions de sinus impairs (forme $x=\cos(t)$)

$$g(t) = (\sin^2(t))^{\frac{\Lambda}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} B_{2l+1} \sin((2l+1)t)$$

$$\begin{cases} \alpha_l B_{2l-3} + (\beta_l - \chi_l^{-1} a) B_{2l-1} + (\gamma_l - \chi_l^0 a) B_{2l+1} + (\delta_l - \chi_l^{+1} a) B_{2l+3} + \varepsilon_l B_{2l+5} = 0 \\ \alpha_l = \varepsilon_l = -\frac{q}{2} \quad \chi_l^{-1} = \chi_l^{+1} = -\frac{1}{2} \quad \chi_l^0 = 1 \\ \beta_l = \frac{1}{2} (2q - (2l-1-\Lambda)^2) \quad \gamma_l = (2l+1)^2 - q + \Lambda^2 - 4\Lambda \quad \delta_l = \frac{1}{2} (2q - (2l+3+\Lambda)^2) \\ l=0 \rightarrow (\gamma_0 - \chi_0^0 a) B_1 + (\delta_0 - \chi_0^{+1} a) B_3 + \varepsilon_0 B_5 = 0 \quad \gamma_0 = \frac{1}{2} (3(\Lambda-1)^2 - 4q) \quad \delta_0 = \frac{1}{2} (3q - (3+\Lambda)^2) \quad \chi_0^0 = \frac{3}{2} \\ l=1 \rightarrow (\beta_1 - \chi_1^{-1} a) B_1 + (\gamma_1 - \chi_1^0 a) B_3 + (\delta_1 - \chi_1^{+1} a) B_5 + \varepsilon_1 B_7 = 0 \quad \beta_1 = \frac{1}{2} (3q - (\Lambda-1)^2) \end{cases}$$

En introduisant **M** une matrice penta-diagonale et **B** une matrice tri-diagonale, le système d'équations linéaires devient le suivant :

$$\begin{pmatrix} \gamma_0 & \delta_0 & \varepsilon_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 & \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 & \varepsilon_2 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 & \varepsilon_3 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} \chi_0^0 & \chi_0^{+1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \chi_1^{-1} & \chi_1^0 & \chi_1^0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \chi_2^{-1} & \chi_2^0 & \chi_2^{+1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \chi_3^{-1} & \chi_3^0 & \chi_3^{+1} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_3 \\ B_5 \\ B_7 \\ \dots \\ B_{2l+1} \\ \dots \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{M} - a \mathbf{C}) \mathbf{B} = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{C}^{-1} \mathbf{M} - a \mathbf{I}) \mathbf{B} = 0$$

On voit donc qu'il s'agit d'un problème de détermination des valeurs et de vecteurs propres de la matrice $\mathbf{C}^{-1} \mathbf{M}$. Les coefficients du développement sont les vecteurs propres calculés à partir des valeurs propres déterminées par diagonalisation.

Construction des solutions de l'équation des ondes sphéroïdales à partir des fonctions de Mathieu associées (forme $x=\cos(t)$) selon une récurrence à 5 termes

Comme la liaison des solutions de l'équation de Mathieu associées :

$$x = \cos(t) \quad g''(t) + \left(a - 2q \cos(2t) - \frac{\Lambda(\Lambda-1)}{\sin^2(t)} \right) g(t) = 0 \quad \text{avec les solutions de l'équation des ondes}$$

$$\text{sphéroïdales } (1-x^2) \frac{d^2 y(x)}{dx^2} - (2\lambda+1)x \frac{dy(x)}{dx} + \left(\omega + \gamma^2(1-x^2) - \frac{\mu(\mu+2\lambda-1)}{1-x^2} \right) y(x) = 0 \quad \text{est la suivante :}$$

$y(x) = (1-x^2)^{-\frac{\lambda}{2}} g(\text{ArcCos}(x))$, alors les ondes hyper-sphéroïdales, ainsi que leurs dérivées première et seconde, s'écrivent :

$$\omega = a - \lambda^2 - \frac{\gamma^2}{2} \quad q = -\frac{\gamma^2}{4} \quad \Lambda = 1 - \lambda - \mu$$

$$y(x) = (1-x^2)^{-\frac{\lambda}{2}} g(\text{ArcCos}(x))$$

$$y'(x) = -(1-x^2)^{-\frac{\lambda+1}{2}} g'(\text{ArcCos}(x)) + \lambda x (1-x^2)^{-\frac{\lambda+2}{2}} g(\text{ArcCos}(x))$$

$$y''(x) = (1-x^2)^{-\frac{\lambda+2}{2}} g''(\text{ArcCos}(x)) - (1+2\lambda)x (1-x^2)^{-\frac{\lambda+3}{2}} g'(\text{ArcCos}(x)) + \lambda (1+x^2(1+\lambda)) (1-x^2)^{-\frac{\lambda+4}{2}} g(\text{ArcCos}(x))$$

Développement direct des solutions périodiques de l'équation de Mathieu associée (forme $x=\sin(t)$), en fonctions sinusoïdales

On peut également rechercher des solutions périodiques de l'équation différentielle de Mathieu associée $g''(t) + \left(a + 2q \cos(2t) - \frac{\Lambda(\Lambda-1)}{\cos^2(t)}\right)g(t) = 0$, en injectant directement des développements en fonctions sinusoïdales. Plus précisément sous les diverses formes suivantes, cela conduit à des récurrence à 5 termes :

Développement en fonctions de Cosinus pairs (forme $x=\sin(t)$)

$$g(t) = (\cos^2(t))^{\frac{\Lambda}{2}} \sum_{l=0}^{\Lambda/2+\infty} A_{2l} \cos(2l t)$$

$$\begin{cases} \alpha_l A_{2l-4} + (\beta_l - \chi_l^{-1} a) A_{2l-2} + (\gamma_l - \chi_l^0 a) A_{2l} + (\delta_l - \chi_l^{+1} a) A_{2l+2} + \varepsilon_l A_{2l+4} = 0 \\ \alpha_l = \varepsilon_l = -\frac{q}{2} \quad \chi_l^{-1} = \chi_l^{+1} = \frac{1}{2} \quad \chi_l^0 = 1 \\ \beta_l = -\frac{1}{2}(2q - (2l-2+\Lambda)^2) \quad \gamma_l = 4l^2 - q + \Lambda^2 \quad \delta_l = -\frac{1}{2}(a + 2q - (2l+2-\Lambda)^2) \\ l=0 \rightarrow (\gamma_0 - \chi_0^0 a) A_0 + (\delta_0 - \chi_0^{+1} a) A_2 + \varepsilon_0 A_4 = 0 \quad \gamma_0 = \frac{1}{2}(\Lambda^2 - q) \quad \chi_0^0 = \frac{1}{2} \\ l=1 \rightarrow (\beta_1 - \chi_1^{-1} a) A_0 + (\gamma_1 - \chi_1^0 a) A_2 + (\delta_1 - \chi_1^{+1} a) A_4 + \varepsilon_1 A_6 = 0 \quad \gamma_1 = 4 - \frac{3}{2}q + \Lambda^2 \end{cases}$$

En introduisant **M** une matrice penta-diagonale et **C** une matrice tri-diagonale, le système d'équations linéaires devient le suivant :

$$\begin{pmatrix} \gamma_0 & \delta_0 & \varepsilon_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 & \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 & \varepsilon_2 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 & \varepsilon_3 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} \chi_0^0 & \chi_0^{+1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \chi_1^{-1} & \chi_1^0 & \chi_1^0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \chi_2^{-1} & \chi_2^0 & \chi_2^{+1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \chi_3^{-1} & \chi_3^0 & \chi_3^{+1} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_2 \\ A_4 \\ A_6 \\ \dots \\ A_{2l} \\ \dots \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{M} - a \mathbf{C})\mathbf{A} = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{C}^{-1}\mathbf{M} - a \mathbf{I})\mathbf{A} = 0$$

On voit donc qu'il s'agit d'un problème de détermination des valeurs et de vecteurs propres de la matrice $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{M}$. Les coefficients du développement sont les vecteurs propres calculés à partir des valeurs propres déterminées par diagonalisation.

Développement en fonctions de Cosinus impairs (forme $x=\sin(t)$)

$$g(t) = (\cos^2(t))^{-\frac{\Lambda}{2}} \sum_{l=0}^{\Lambda/2+\infty} A_{2l} \cos((2l+1)t)$$

$$\begin{cases} \alpha_l A_{2l-3} + (\beta_l - \chi_l^{-1} a) A_{2l-1} + (\gamma_l - \chi_l^0 a) A_{2l+1} + (\delta_l - \chi_l^{+1} a) A_{2l+3} + \varepsilon_l A_{2l+5} = 0 \\ \alpha_l = \varepsilon_l = -\frac{q}{2} \quad \chi_l^{-1} = \chi_l^{+1} = \frac{1}{2} \quad \chi_l^0 = 1 \\ \beta_l = -\frac{1}{2}(2q - (2l-1-\Lambda)^2) \quad \gamma_l = (2l+1)^2 - q + \Lambda^2 - 4\Lambda \quad \delta_l = -\frac{1}{2}(2q - (2l+3+\Lambda)^2) \\ l=0 \rightarrow (\gamma_0 - \chi_0^0 a) A_1 + (\delta_0 - \chi_0^{+1} a) A_3 + \varepsilon_0 A_5 = 0 \quad \gamma_0 = \frac{1}{2}(3(\Lambda-1)^2 - 4q) \quad \delta_0 = -\frac{1}{2}(3q - (3+\Lambda)^2) \quad \chi_0^0 = \frac{3}{2} \\ l=1 \rightarrow (\beta_1 - \chi_1^{-1} a) A_1 + (\gamma_1 - \chi_1^0 a) A_3 + (\delta_1 - \chi_1^{+1} a) A_5 + \varepsilon_1 A_7 = 0 \quad \beta_1 = -\frac{1}{2}(3q - (\Lambda-1)^2) \end{cases}$$

En introduisant **M** une matrice penta-diagonale et **B** une matrice tri-diagonale, le système d'équations linéaires devient le suivant :

$$\begin{pmatrix} \gamma_0 & \delta_0 & \varepsilon_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 & \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 & \varepsilon_2 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 & \varepsilon_3 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} \chi_0^0 & \chi_0^{+1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \chi_1^{-1} & \chi_1^0 & \chi_1^0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \chi_2^{-1} & \chi_2^0 & \chi_2^{+1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \chi_3^{-1} & \chi_3^0 & \chi_3^{+1} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_3 \\ A_5 \\ A_7 \\ \dots \\ A_{2l+1} \\ \dots \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{M} - a \mathbf{C}) \mathbf{A} = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{C}^{-1} \mathbf{M} - a \mathbf{I}) \mathbf{A} = 0$$

On voit donc qu'il s'agit d'un problème de détermination des valeurs et de vecteurs propres de la matrice $\mathbf{C}^{-1} \mathbf{M}$. Les coefficients du développement sont les vecteurs propres calculés à partir des valeurs propres déterminées par diagonalisation.

Développement en fonctions de sinus pairs (forme $x = \sin(t)$)

$$g(t) = (\cos^2(t))^{-\frac{\Lambda}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} B_{2l+2} \sin((2l+2)t)$$

$$\begin{cases} \alpha_l B_{2l-2} + (\beta_l - \chi_l^{-1} a) B_{2l} + (\gamma_l - \chi_l^0 a) B_{2l+2} + (\delta_l - \chi_l^{+1} a) B_{2l+4} + \varepsilon_l B_{2l+6} = 0 \\ \alpha_l = \varepsilon_l = -\frac{q}{2} \quad \chi_l^{-1} = \chi_l^{+1} = \frac{1}{2} \quad \chi_l^0 = 1 \\ \beta_l = -\frac{1}{2} (2q - (2l - \Lambda)^2) \quad \gamma_l = 4(l+1)^2 - q + \Lambda^2 - 4\Lambda \quad \delta_l = -\frac{1}{2} (2q - (2l + 4 + \Lambda)^2) \\ l=0 \rightarrow (\gamma_0 - \chi_0^0 a) B_2 + (\delta_0 - \chi_0^{+1} a) B_4 + \varepsilon_0 B_6 = 0 \quad \gamma_0 = (\Lambda - 2)^2 - \frac{q}{2} \end{cases}$$

En introduisant **M** une matrice penta-diagonale et **C** une matrice tri-diagonale, le système d'équations linéaires devient le suivant :

$$\begin{pmatrix} \gamma_0 & \delta_0 & \varepsilon_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 & \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 & \varepsilon_2 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 & \varepsilon_3 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} \chi_0^0 & \chi_0^{+1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \chi_1^{-1} & \chi_1^0 & \chi_1^0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \chi_2^{-1} & \chi_2^0 & \chi_2^{+1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \chi_3^{-1} & \chi_3^0 & \chi_3^{+1} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_2 \\ B_4 \\ B_6 \\ B_8 \\ \dots \\ B_{2l+2} \\ \dots \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{M} - a \mathbf{C}) \mathbf{B} = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{C}^{-1} \mathbf{M} - a \mathbf{I}) \mathbf{B} = 0$$

On voit donc qu'il s'agit d'un problème de détermination des valeurs et de vecteurs propres de la matrice $\mathbf{C}^{-1} \mathbf{M}$. Les coefficients du développement sont les vecteurs propres calculés à partir des valeurs propres déterminées par diagonalisation.

Développement en fonctions de sinus impairs (forme $x=\sin(t)$)

$$g(t) = (\cos^2(t))^{\frac{\Lambda}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} B_{2l+1} \sin((2l+1)t)$$

$$\begin{cases} \alpha_l B_{2l-3} + (\beta_l - \chi_l^{-1} a) B_{2l-1} + (\gamma_l - \chi_l^0 a) B_{2l+1} + (\delta_l - \chi_l^{+1} a) B_{2l+3} + \varepsilon_l B_{2l+5} = 0 \\ \alpha_l = \varepsilon_l = -\frac{q}{2} \quad \chi_l^{-1} = \chi_l^{+1} = \frac{1}{2} \quad \chi_l^0 = 1 \\ \beta_l = -\frac{1}{2}(2q - (2l-1-\Lambda)^2) \quad \gamma_l = (2l+1)^2 - q + \Lambda^2 \quad \delta_l = -\frac{1}{2}(2q - (2l+3+\Lambda)^2) \\ l=0 \rightarrow (\gamma_0 - \chi_0^0 a) B_1 + (\delta_0 - \chi_0^{+1} a) B_3 + \varepsilon_0 B_5 = 0 \quad \gamma_0 = \frac{1}{2}(1+\Lambda)^2 \quad \delta_0 = -\frac{1}{2}(q - (3-\Lambda)^2) \quad \chi_0^0 = \frac{1}{2} \\ l=1 \rightarrow (\beta_1 - \chi_1^{-1} a) B_1 + (\gamma_1 - \chi_1^0 a) B_3 + (\delta_1 - \chi_1^{+1} a) B_5 + \varepsilon_1 B_7 = 0 \quad \beta_1 = -\frac{1}{2}(q - (1+\Lambda)^2) \end{cases}$$

En introduisant **M** une matrice penta-diagonale et **B** une matrice tri-diagonale, le système d'équations linéaires devient le suivant :

$$\begin{pmatrix} \gamma_0 & \delta_0 & \varepsilon_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 & \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 & \varepsilon_2 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 & \varepsilon_3 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} \chi_0^0 & \chi_0^{+1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \chi_1^{-1} & \chi_1^0 & \chi_1^0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \chi_2^{-1} & \chi_2^0 & \chi_2^{+1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \chi_3^{-1} & \chi_3^0 & \chi_3^{+1} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_3 \\ B_5 \\ B_7 \\ \dots \\ B_{2l+1} \\ \dots \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{M} - a \mathbf{C})\mathbf{B} = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{C}^{-1}\mathbf{M} - a \mathbf{I})\mathbf{B} = 0$$

On voit donc qu'il s'agit d'un problème de détermination des valeurs et de vecteurs propres de la matrice $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{M}$. Les coefficients du développement sont les vecteurs propres calculés à partir des valeurs propres déterminées par diagonalisation.

Construction des solutions de l'équation des ondes sphéroïdales à partir des fonctions de Mathieu associées (forme $\sin(t)$) selon une récurrence à 5 termes

Comme la liaison des solutions de l'équation de Mathieu associées :

$$x = \sin(t) \quad g''(t) + \left(a + 2q \cos(2t) - \frac{\Lambda(\Lambda-1)}{\cos^2(t)} \right) g(t) = 0 \quad \text{avec les solutions de l'équation des ondes}$$

$$\text{sphéroïdales} \quad (1-x^2) \frac{d^2 y(x)}{dx^2} - (1+2\lambda)x \frac{dy(x)}{dx} + \left(\omega + \gamma^2(1-x^2) - \frac{\mu(\mu+2\lambda-1)}{1-x^2} \right) y(x) = 0 \quad \text{est la}$$

suivante : $y(x) = (1-x^2)^{\frac{\lambda}{2}} g(\text{ArcSin}(x))$, alors les ondes sphéroïdales, ainsi que leurs dérivées première et seconde, s'écrivent :

$$\omega = a - \lambda^2 - \frac{\gamma^2}{2} \quad q = +\frac{\gamma^2}{4} \quad \Lambda = 1 - \lambda - \mu$$

$$y(x) = (1-x^2)^{\frac{\lambda}{2}} g(\text{ArcSin}(x))$$

$$y'(x) = (1-x^2)^{\frac{\lambda+1}{2}} g'(\text{ArcSin}(x)) + x \lambda (1-x^2)^{\frac{\lambda+2}{2}} g(\text{ArcSin}(x))$$

$$y''(x) = (1-x^2)^{\frac{\lambda+2}{2}} g''(\text{ArcSin}(x)) + (2\lambda+1)x (1-x^2)^{\frac{\lambda+3}{2}} g'(\text{ArcSin}(x)) + \lambda(1+x^2(\lambda+1))(1-x^2)^{\frac{\lambda+4}{2}} g(\text{ArcSin}(x))$$

Correspondance entre les valeurs caractéristiques des équations différentielles de Mathieu associées et des équations différentielles de Mathieu associées intermédiaires

On a donc essentiellement 6 types d'équations différentielles reliées entre-elles, et pour chacun des deux groupes 2x4 solutions, notons les comme ceci :

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned}
 & w''(t) + 2\Lambda \cotan(t) w'(t) + (a_{2n}^{c,m}(\Lambda, q) - \Lambda^2 + 2q \cos(2t)) w(t) = 0 \rightarrow ccei_{2n}^\Lambda(t, q) = \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l}^\Lambda(q) \cos(2l t) \\
 & w''(t) + 2\Lambda \cotan(t) w'(t) + (a_{2n+1}^{c,m}(\Lambda, q) - \Lambda^2 + 2q \cos(2t)) w(t) = 0 \rightarrow ccei_{2n+1}^\Lambda(t, q) = \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l+1}^\Lambda(q) \cos((2l+1)t) \\
 & w''(t) + 2(1-\Lambda) \cotan(t) w'(t) + (a_{2n}^{c,m}(1-\Lambda, q) - (1-\Lambda)^2 + 2q \cos(2t)) w(t) = 0 \rightarrow ccei_{2n}^{1-\Lambda}(t, q) = \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l}^{1-\Lambda}(q) \cos(2l t) \\
 & w''(t) + 2(1-\Lambda) \cotan(t) w'(t) + (a_{2n+1}^{c,m}(1-\Lambda, q) - (1-\Lambda)^2 + 2q \cos(2t)) w(t) = 0 \rightarrow ccei_{2n+1}^{1-\Lambda}(t, q) = \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l+1}^{1-\Lambda}(q) \cos((2l+1)t) \\
 & g''(t) + \left(a_{2n}^c(\Lambda, q) - 2q \cos(2t) - \frac{\Lambda(\Lambda-1)}{\sin^2(t)} \right) g(t) = 0 \rightarrow cce_{2n}^\Lambda(t, q) = (\sin^2(t))^{\frac{\Lambda}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l}^\Lambda(q) \cos(2l t) \\
 & g''(t) + \left(a_{2n+1}^c(\Lambda, q) - 2q \cos(2t) - \frac{\Lambda(\Lambda-1)}{\sin^2(t)} \right) g(t) = 0 \rightarrow cce_{2n+1}^\Lambda(t, q) = (\sin^2(t))^{\frac{\Lambda}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l+1}^\Lambda(q) \cos((2l+1)t) \\
 & g''(t) + \left(b_{2n+2}^c(\Lambda, q) - 2q \cos(2t) - \frac{\Lambda(\Lambda-1)}{\sin^2(t)} \right) g(t) = 0 \rightarrow cse_{2n+2}^\Lambda(t, q) = (\sin^2(t))^{\frac{\Lambda}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} B_{2l+2}^\Lambda(q) \sin((2l+2)t) \\
 & g''(t) + \left(b_{2n+1}^c(\Lambda, q) - 2q \cos(2t) - \frac{\Lambda(\Lambda-1)}{\sin^2(t)} \right) g(t) = 0 \rightarrow cse_{2n+1}^\Lambda(t, q) = (\sin^2(t))^{\frac{\Lambda}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} B_{2l+1}^\Lambda(q) \sin((2l+1)t)
 \end{aligned} \right. \\
 & x = \cos(t) \\
 \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 & w''(t) - 2\Lambda \tan(t) w'(t) + (a_{2n}^{s,m}(\Lambda, q) - \Lambda^2 - 2q \cos(2t)) w(t) = 0 \rightarrow scei_{2n}^\Lambda(t, q) = \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l}^\Lambda(q) \cos(2l t) \\
 & w''(t) - 2\Lambda \tan(t) w'(t) + (b_{2n+1}^{s,m}(\Lambda, q) - \Lambda^2 - 2q \cos(2t)) w(t) = 0 \rightarrow ssei_{2n+1}^\Lambda(t, q) = \sum_{l=0}^{l=+\infty} B_{2l+1}^\Lambda(q) \sin((2l+1)t) \\
 & w''(t) - 2(1-\Lambda) \tan(t) w'(t) + (a_{2n}^{s,m}(1-\Lambda, q) - (1-\Lambda)^2 - 2q \cos(2t)) w(t) = 0 \rightarrow scei_{2n}^{1-\Lambda}(t, q) = \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l}^{1-\Lambda}(q) \cos(2l t) \\
 & w''(t) - 2(1-\Lambda) \tan(t) w'(t) + (b_{2n+1}^{s,m}(1-\Lambda, q) - (1-\Lambda)^2 - 2q \cos(2t)) w(t) = 0 \rightarrow ssei_{2n+1}^{1-\Lambda}(t, q) = \sum_{l=0}^{l=+\infty} B_{2l+1}^{1-\Lambda}(q) \sin((2l+1)t) \\
 & g''(t) + \left(a_{2n}^s(\Lambda, q) + 2q \cos(2t) - \frac{\Lambda(\Lambda-1)}{\cos^2(t)} \right) g(t) = 0 \rightarrow sce_{2n}^\Lambda(t, q) = (\cos^2(t))^{\frac{\Lambda}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l}^\Lambda(q) \cos(2l t) \\
 & g''(t) + \left(a_{2n+1}^s(\Lambda, q) + 2q \cos(2t) - \frac{\Lambda(\Lambda-1)}{\cos^2(t)} \right) g(t) = 0 \rightarrow sce_{2n+1}^\Lambda(t, q) = (\cos^2(t))^{\frac{\Lambda}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l+1}^\Lambda(q) \cos((2l+1)t) \\
 & g''(t) + \left(b_{2n+2}^s(\Lambda, q) + 2q \cos(2t) - \frac{\Lambda(\Lambda-1)}{\cos^2(t)} \right) g(t) = 0 \rightarrow sse_{2n+2}^\Lambda(t, q) = (\cos^2(t))^{\frac{\Lambda}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} B_{2l+2}^\Lambda(q) \sin((2l+2)t) \\
 & g''(t) + \left(b_{2n+1}^s(\Lambda, q) + 2q \cos(2t) - \frac{\Lambda(\Lambda-1)}{\cos^2(t)} \right) g(t) = 0 \rightarrow sse_{2n+1}^\Lambda(t, q) = (\cos^2(t))^{\frac{\Lambda}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} B_{2l+1}^\Lambda(q) \sin((2l+1)t)
 \end{aligned} \right. \\
 & x = \sin(t)
 \end{aligned}$$

Par ailleurs notons bien que pour les équations différentielles de Mathieu associées intermédiaires, je n'ai réussi à faire converger la récurrence à 4 termes que pour les valeurs de μ demi-entières, donc pour des valeurs de Λ entières.

Les formules de liaison de ces diverses valeurs caractéristiques sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
 x = \text{Cos}(t) & \begin{cases} a_{2n}^c(\Lambda, q) = a_{2n}^{c,m}(\Lambda, -q) \\ a_{2n+1}^c(\Lambda, q) = a_{2n+1}^{c,m}(\Lambda, -q) \\ b_{2n+1}^c(\Lambda, q) = a_{2n}^{c,m}(1 - \Lambda, -q) \\ b_{2n+2}^c(\Lambda, q) = a_{2n+3}^{c,m}(1 - \Lambda, -q) \end{cases} \\
 x = \text{Sin}(t) & \begin{cases} a_{2n}^s(\Lambda, q) = a_{2n}^{s,m}(\Lambda, -q) \\ a_{2n+1}^s(\Lambda, q) = a_{2n}^{s,m}(1 - \Lambda, -q) \\ b_{2n+2}^s(\Lambda, q) = b_{2n+3}^{s,m}(1 - \Lambda, -q) \\ b_{2n+1}^s(\Lambda, q) = b_{2n+1}^{s,m}(\Lambda, -q) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Construction des fonctions hyper-sphéroïdales radiales dans le cas μ général, telle que $\mu+\lambda$ et $\nu+\lambda$ entier

Le développement sous forme de fonctions de Bessel des solutions radiales de l'équation des ondes hyper-sphéroïdales :

$$\begin{cases} x \in [1, +\infty] & HS_v^{(i)\lambda, \mu}(x, \gamma^2) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_{v,k}^{\lambda, \mu}(\gamma^2) \frac{f_{v+\lambda+2k}(\gamma x)}{(\gamma x)^\lambda} \quad i = 1, 2, 3, 4 \\ \text{Fonctions de Bessel} & f_{v+\lambda+2k}(x) \quad f = J, Y, H^{(1)}, H^{(2)} \end{cases}$$

conduit à une récurrence similaire à celles des fonctions angulaires sous cette forme :

$$\begin{aligned} A_k d_{v,k-1}^{\lambda, \mu}(\gamma^2) + (B_k - \omega(\gamma^2)) d_{v,k}^{\lambda, \mu}(\gamma^2) + C_k d_{v,k+1}^{\lambda, \mu}(\gamma^2) &= 0 \quad k \in \{-\infty, \dots, 0, 1, \dots, +\infty\} \\ \begin{cases} A_k = -\gamma^2 \frac{(\nu - \mu + 2k - 1)(\nu - \mu + 2k)}{(2\nu + 4k + 2\lambda - 2)(2\nu + 4k + 2\lambda - 4)} \\ B_k = (\nu + 2k)(\nu + 2k + 2\lambda) - 2\gamma^2 \frac{(\nu + 2k)(\nu + 2k + 2\lambda) + \mu^2 - 1 + (2\lambda - 1)(\mu + \lambda)}{(2\nu + 4k + 2\lambda - 2)(2\nu + 4k + 2\lambda + 2)} \\ C_k = -\gamma^2 \frac{(\nu + \mu + 2k + 2\lambda)(\nu + \mu + 2k + 2\lambda + 1)}{(2\nu + 4k + 2\lambda + 2)(2\nu + 4k + 2\lambda + 4)} \end{cases} \\ \text{Pôles possibles sur} & \frac{1}{2\nu + 4k + 2\lambda - 4}, \frac{1}{2\nu + 4k + 2\lambda - 2}, \frac{1}{2\nu + 4k + 2\lambda + 2}, \frac{1}{2\nu + 4k + 2\lambda + 4} \end{aligned}$$

Cette récurrence présente également des pôles pour les valeurs de $\nu+\lambda$ entières. Aussi il est également nécessaire d'envisager une autre forme de construction des fonctions hyper-sphéroïdales radiales. Notamment par exemple pour la fonction hyper-sphéroïdale radiale de première espèce : $HS_n^{(1)\lambda, \mu}(x, \gamma^2) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\gamma^\lambda} \frac{(x^2 - 1)^{\frac{\mu}{2}}}{x^{\mu+\lambda}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_{v,k}^{\lambda, \mu}(\gamma^2) J_{v+\lambda+2k}(\gamma x)$.

D'une manière tout aussi similaire à la construction des solutions de l'équation de Mathieu modifiées, il est envisageable d'introduire l'équation différentielle des fonctions associées de Mathieu modifiées. Pour cela il suffit d'introduire ce que j'appellerais la forme de Liouville « hyperbolique » de l'équation différentielle sphéroïdale. Elle est obtenue avec le changement de variable $x = \cosh(t)$:

$$\begin{aligned} (1-x^2) y''(x) - (1+2\lambda) x y'(x) + \left(\omega + \gamma^2(1-x^2) - \frac{\mu(\mu+2\lambda-1)}{1-x^2} \right) y(x) &= 0 \quad x = \cosh(t) = \cosh(it) \\ \Rightarrow \begin{cases} y(x) = (\sinh^2(t))^{-\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} w(t) = (\cosh^2(t)-1)^{\frac{\Lambda-\lambda}{2}} w(t) \\ \Lambda = 1 - \lambda - \mu \quad q = \frac{\gamma^2}{4} \quad a = \omega + \frac{\gamma^2}{2} + \lambda^2 \end{cases} &\rightarrow w''(t) + 2\Lambda \coth(t) w'(t) - (a - \Lambda^2 - 2q \cosh(2t)) w(t) = 0 \end{aligned}$$

En transcrivant le procédé de l'article de 1923 de E.L.Ince, « Associated Mathieu Functions », le point de départ est la forme de Liouville « hyperbolique » suivante :

$$\begin{cases} x = \cosh(t) \\ y(x) = (\sinh^2(t))^{-\frac{\lambda}{2}} g(t) \Rightarrow g(t) = (\cosh^2(t)-1)^{\frac{\Lambda}{2}} w(t) \Rightarrow g''(t) - \left(a - 2q \cosh(2t) + \frac{\Lambda(\Lambda-1)}{\sinh^2(t)} \right) g(t) = 0 \\ \Lambda = 1 - \lambda - \mu \quad q = \frac{\gamma^2}{4} \quad a = \omega + \frac{1}{4} + \frac{\gamma^2}{2} \end{cases}$$

Une forme équivalente est obtenue avec $y=i \sinh(t)$:

$$(1-x^2)y''(x)-(1+2\lambda)x y'(x)+\left(\omega+\gamma^2(1-x^2)-\frac{\mu(\mu+2\lambda-1)}{1-x^2}\right)y(x)=0 \quad x=i \sinh(t)=\sin(i t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(x)=(\cosh^2(t))^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}}w(t)=(\sinh^2(t)+1)^{\frac{\Lambda-\lambda}{2}}w(t) \\ \Lambda=1-\lambda-\mu \quad q=-\frac{\gamma^2}{4} \quad a=\omega+\frac{\gamma^2}{2}+\lambda^2 \end{cases} \rightarrow w''(t)+2\Lambda \tanh(t)w'(t)-(a-\Lambda^2-2q \cosh(2t))w(t)=0$$

Avec la forme de Liouville « hyperbolique » suivante :

$$\begin{cases} x=i \sinh(t) \\ y(x)=(\cosh^2(t))^{\frac{\lambda}{2}}g(t) \Rightarrow g(t)=(\sinh^2(t)+1)^{\frac{\Lambda}{2}}w(t) \Rightarrow g''(t)-\left(a-2q \cosh(2t)-\frac{\Lambda(\Lambda-1)}{\cosh^2(t)}\right)g(t)=0 \\ \Lambda=1-\lambda-\mu \quad q=-\frac{\gamma^2}{4} \quad a=\omega+\lambda^2+\frac{\gamma^2}{2} \end{cases}$$

Si l'on doit se référer aux équations différentielles de Mathieu associées, avec leur forme intermédiaires :

$$\begin{cases} w''(t)+2\Lambda \cotan(t)w'(t)+(a-\Lambda^2-2q \cos(2t))w(t)=0 \\ w''(t)-2\Lambda \tan(t)w'(t)+(a-\Lambda^2+2q \cos(2t))w(t)=0 \\ g''(t)+\left(a-2q \cos(2t)-\frac{\Lambda(\Lambda-1)}{\sin^2(t)}\right)g(t)=0 \\ g''(t)+\left(a-2q \cos(2t)-\frac{\Lambda(\Lambda-1)}{\cos^2(t)}\right)g(t)=0 \end{cases}$$

On voit qu'il suffit d'effectuer la transformation $t \rightarrow i t$, pour obtenir les équations différentielles de Mathieu associées modifiées.

Aussi une telle construction est donc en théorie possible avec toutes les formes de développement en sinus hyperbolique, par exemple :

$$\begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l}
 x = \text{Cos}(t) \\
 g''(t) + \left(a - 2q \text{Cos}(2t) - \frac{\Lambda(\Lambda-1)}{\text{Sin}^2(t)} \right) g(t) = 0 \\
 g(t) = (\text{Sin}^2(t))^{\frac{\Lambda}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l} \text{Cos}(2l t) \\
 g(t) = (\text{Sin}^2(t))^{\frac{\Lambda}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l+1} \text{Cos}((2l+1)t) \\
 g(t) = (\text{Sin}^2(t))^{-\frac{\Lambda}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} B_{2l+1} \text{Sin}((2l+1)t) \\
 g(t) = (\text{Sin}^2(t))^{-\frac{\Lambda}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} B_{2l+2} \text{Sin}((2l+2)t)
 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l}
 x = \text{Cosh}(t) \\
 g''(t) - \left(a - 2q \text{Cosh}(2t) + \frac{\Lambda(\Lambda-1)}{\text{Sinh}^2(t)} \right) g(t) = 0 \\
 g(t) = (\text{Sinh}^2(t))^{\frac{\Lambda}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l} \text{Cosh}(2l t) \\
 g(t) = (\text{Sinh}^2(t))^{\frac{\Lambda}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l+1} \text{Cosh}((2l+1)t) \\
 g(t) = (\text{Sinh}^2(t))^{-\frac{\Lambda}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} B_{2l+1} \text{Sinh}((2l+1)t) \\
 g(t) = (\text{Sinh}^2(t))^{-\frac{\Lambda}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} B_{2l+2} \text{Sinh}((2l+2)t)
 \end{array} \right. \\
 \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 x = \text{Sin}(t) \\
 g''(t) + \left(a - 2q \text{Cos}(2t) - \frac{\Lambda(\Lambda-1)}{\text{Cos}^2(t)} \right) g(t) = 0 \\
 g(t) = (\text{Cos}^2(t))^{\frac{\Lambda}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l} \text{Cos}(2l t) \\
 g(t) = (\text{Cos}^2(t))^{-\frac{\Lambda}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l+1} \text{Cos}((2l+1)t) \\
 g(t) = (\text{Cos}^2(t))^{\frac{\Lambda}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} B_{2l+1} \text{Sin}((2l+1)t) \\
 g(t) = (\text{Cos}^2(t))^{-\frac{\Lambda}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} B_{2l+2} \text{Sin}((2l+2)t)
 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l}
 x = i \text{Sinh}(t) \\
 g''(t) - \left(a - 2q \text{Cosh}(2t) - \frac{\Lambda(\Lambda-1)}{\text{Cosh}^2(t)} \right) g(t) = 0 \\
 g(t) = (\text{Cosh}^2(t))^{\frac{\Lambda}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l} \text{Cosh}(2l t) \\
 g(t) = (\text{Cosh}^2(t))^{-\frac{\Lambda}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{2l+1} \text{Cosh}((2l+1)t) \\
 g(t) = (\text{Cosh}^2(t))^{\frac{\Lambda}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} B_{2l+1} \text{Sinh}((2l+1)t) \\
 g(t) = (\text{Cosh}^2(t))^{-\frac{\Lambda}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} B_{2l+2} \text{Sinh}((2l+2)t)
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Le gros inconvénient de ces constructions c'est qu'elles ne convergent pas rapidement, voir pas du tout au delà d'un certain rayon de convergence. La question se pose donc immédiatement : existe-t-il une autre forme de construction pour les fonctions de Mathieu associées modifiées dont la convergence serait plus rapide ? Je pense notamment à des constructions comme celles des fonctions de Mathieu modifiées à l'aide de fonctions de Bessel.

D'une discussion menée à propos des fonctions sphéroïdales et de leur lien avec les fonctions de Mathieu associées il ressort que l'on peut effectivement construire des solutions non périodiques de l'équation de Mathieu associée modifiée intermédiaire de la forme

$$w(\tilde{\nu}, t) = \frac{1}{\text{Cosh}^\Lambda(t)} \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} \gamma_l J_{\tilde{\nu}+2l}(2\sqrt{q} \text{Cosh}(t)) \text{ à la seule condition que } \tilde{\nu} = \nu + \lambda \text{ ne soit pas un entier.}$$

Mais cela n'est pas vraiment un résultat supplémentaire puisque il s'agit de fonctions apparentées aux fonctions hyper-sphéroïdales radiales.

Équivalence de l'équation des ondes sphéroïdales avec l'équation des ondes hyper-sphéroïdales

Un court chapitre qui concerne l'équivalence entre ces deux types d'équation différentielle. On a vu que la solution de l'équation hyper-sphéroïdale pouvait se construire avec un développement de la forme :

$$(1-x^2)y''(x) - (1+2\lambda)x y'(x) + \left(\omega + \gamma^2(1-x^2) - \frac{\mu(\mu+2\lambda-1)}{1-x^2} \right) y(x) = 0$$

$$y(x) = (1-x^2)^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} g(x) \Rightarrow (1-x^2)g''(x) - (3-2\lambda-2\mu)x g'(x) + (\omega + (1-\mu)(2\lambda+\mu-1) + \gamma^2(1-x^2))g(x) = 0$$

Par le changement de paramètre suivant $\mu \rightarrow -\mu+1-2\lambda$ le développement de la solution de l'équation hyper-sphéroïdale peut également s'écrire ainsi :

$$\mu \rightarrow -\mu+1-2\lambda \Rightarrow (1-x^2)y''(x) - (1+2\lambda)x y'(x) + \left(\omega + \gamma^2(1-x^2) - \frac{\mu(\mu+2\lambda-1)}{1-x^2} \right) y(x) = 0$$

$$y(x) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} g(x) \Rightarrow (1-x^2)g''(x) - (1+2\lambda+2\mu)x g'(x) + (\omega - \mu(2\lambda+\mu) + \gamma^2(1-x^2))g(x) = 0$$

On peut également construire une solution de l'équation des ondes sphéroïdales à l'aide du développement suivant :

$$(1-x^2)y''(x) - 2x y'(x) + \left(\omega + \gamma^2(1-x^2) - \frac{\mu^2}{1-x^2} \right) y(x) = 0$$

$$y(x) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} g(x) \Rightarrow (1-x^2)g''(x) - 2(1+\mu)x g'(x) + (\omega - \mu(\mu+1) + \gamma^2(1-x^2))g(x) = 0$$

Or la précédente équation hyper-sphéroïdale associée à $g(x)$:

$$(1-x^2)g''(x) - (1+2\lambda+2\mu)x g'(x) + (\omega - \mu(\mu+2\lambda) + \gamma^2(1-x^2))g(x) = 0$$

est équivalente à l'équation sphéroïdale associée :

$$(1-x^2)g''(x) - 2(1+\tilde{\mu})x g'(x) + (\tilde{\omega} - \tilde{\mu}(\tilde{\mu}+1) + \gamma^2(1-x^2))g(x) = 0$$

Par le double changement de paramètres :

$$(1-x^2)g''(x) - (1+2\lambda+2\mu)x g'(x) + (\omega - \mu(\mu+2\lambda) + \gamma^2(1-x^2))g(x) = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mu} &= \mu + \lambda - \frac{1}{2} \Rightarrow 1+2\lambda+2\mu = 2(\tilde{\mu}+1) \\ \tilde{\omega} &= \omega + \lambda^2 - \frac{1}{4} \Rightarrow \omega - \mu(\mu+2\lambda) = \tilde{\omega} - \tilde{\mu}(\tilde{\mu}+1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow (1-x^2)g''(x) - 2(\tilde{\mu}+1)x g'(x) + (\tilde{\omega} - \tilde{\mu}(\tilde{\mu}+1) + \gamma^2(1-x^2))g(x) = 0$$

Dans ces conditions partant du développement des fonctions sphéroïdales à l'aide de fonctions de Gegenbauer : $ps_v^\mu(x, \gamma^2) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_{v,k}^\mu(\gamma^2) C_{v+2k}^{\frac{1}{2}+\mu}(x)$ qui conduit à la récurrence à trois termes suivante :

$$A_k g_{v,k-1}^\mu(\gamma^2) + (B_k - \omega) g_{v,k}^\mu(\gamma^2) + C_k g_{v,k+1}^\mu(\gamma^2) = 0 \quad k \in \{-\infty, \dots, -1, \dots, 0, 1, \dots, +\infty\}$$

$$\left\{ \begin{aligned} A_k &= \gamma^2 \frac{(v+2k-1)(v+2k)}{(2v+2\mu+4k-3)(2v+2\mu+4k-1)} \\ B_k &= (v+2k)(v+2\mu+2k+1) - 2\gamma^2 \frac{(v+2k)(v+2\mu+2k+1) + (2\mu-1)(1+\mu)}{(2v+2\mu+4k-1)(2v+2\mu+4k+3)} \\ C_k &= \gamma^2 \frac{(v+2\mu+2k+2)(v+2\mu+2k+1)}{(2v+2\mu+4k+3)(2v+2\mu+4k+5)} \end{aligned} \right.$$

On peut appliquer pour le développement sur les fonctions hyper-sphéroïdales à l'aide également de fonctions de Gegenbauer :

$$hps_v^\mu(x, \gamma^2) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_{v,k}^{\tilde{\mu}}(\gamma^2) C_{v+2k}^{\frac{1}{2}+\tilde{\mu}}(x) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_{v,k}^{\tilde{\mu}}(\gamma^2) C_{v+2k}^{\mu+\lambda}(x)$$

qui conduit à la récurrence à trois termes suivante, la substitution des paramètres ω et μ par les paramètres $\tilde{\omega}$ et $\tilde{\mu}$:

$$A_k g_{v,k-1}^{\tilde{\mu}}(\gamma^2) + (B_k - \tilde{\omega}) g_{v,k}^{\tilde{\mu}}(\gamma^2) + C_k g_{v,k+1}^{\tilde{\mu}}(\gamma^2) = 0 \quad k \in \{-\infty, \dots, -1, \dots, 0, 1, \dots, +\infty\}$$

$$\tilde{\mu} = \mu + \lambda - \frac{1}{2} \quad \tilde{\omega} = \omega + \lambda^2 - \frac{1}{4} \quad 2\tilde{\mu} = 2\mu + 2\lambda - 1$$

$$\begin{cases} A_k = \gamma^2 \frac{(v+2k-1)(v+2k)}{(2v+2\tilde{\mu}+4k-3)(2v+2\tilde{\mu}+4k-1)} \\ B_k = (v+2k)(v+2\tilde{\mu}+2k+1) - 2\gamma^2 \frac{(v+2k)(v+2\tilde{\mu}+2k+1) + (2\tilde{\mu}-1)(1+\tilde{\mu})}{(2v+2\tilde{\mu}+4k-1)(2v+2\tilde{\mu}+4k+3)} \\ C_k = \gamma^2 \frac{(v+2\tilde{\mu}+2k+2)(v+2\tilde{\mu}+2k+1)}{(2v+2\tilde{\mu}+4k+3)(2v+2\tilde{\mu}+4k+5)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_k = \gamma^2 \frac{(v+2k-1)(v+2k)}{(2v+2\mu+2\lambda+4k-4)(2v+2\mu+2\lambda+4k-2)} \\ B_k = (v+2k)(v+2\mu+2\lambda-1+2k+1) - 2\gamma^2 \frac{2(v+2k)(v+2\mu+2\lambda+2k) + (2\mu+2\lambda-2)(2\mu+2\lambda+1)}{(2v+2\mu+2\lambda+4k-2)(2v+2\mu+2\lambda+4k+2)} \\ C_k = \gamma^2 \frac{(v+2\mu+2\lambda+2k+1)(v+2\mu+2\lambda+2k)}{(2v+2\mu+2\lambda+4k+2)(2v+2\mu+2\lambda+4k+4)} \end{cases}$$

L'équivalence qui vient d'être établie vaut donc pour les développements des fonctions hyper-

sphéroïdales de la forme :

$$\begin{cases} (1-x^2) y''(x) - (1+2\lambda) x y'(x) + \left(\omega + \gamma^2(1-x^2) - \frac{\mu(\mu+2\lambda-1)}{1-x^2} \right) y(x) = 0 \\ y(x) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} g(x) \quad \tilde{\mu} = \mu + \lambda - \frac{1}{2} \quad \tilde{\omega} = \omega + \lambda^2 - \frac{1}{4} \\ \Rightarrow (1-x^2) g''(x) - 2(\tilde{\mu}+1) x g'(x) + (\tilde{\omega} - \tilde{\mu}(\tilde{\mu}+1) + \gamma^2(1-x^2)) g(x) = 0 \end{cases}$$

et les développements des fonctions sphéroïdales de la forme :

$$\begin{cases} (1-x^2) y''(x) - 2x y'(x) + \left(\omega + \gamma^2(1-x^2) - \frac{\mu^2}{1-x^2} \right) y(x) = 0 \\ y(x) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} g(x) \\ \Rightarrow (1-x^2) g''(x) - 2(1+\mu) x g'(x) + (\omega - \mu(\mu+1) + \gamma^2(1-x^2)) g(x) = 0 \end{cases}$$

Développement des fonctions hyper-sphéroïdales angulaires régulières autour de x=0

Dans les ouvrages de J.Meixner.F.W.Schafke « Sphaeroid funktionen » page 238 et suivantes, section 3.24 formules (4) et (6) et de F . M . Arscott . I . N . Sneddon . M . Stark . S . Ulam « Periodic Differential Equations , Spheroidal Wave Equation » page 166 et suivantes, section 8.2 « Solutions valid near z=0 » formules (2), (3a) et (3b), sont proposés pour les fonctions sphéroïdales un développement autour de x=0 sous forme paire ou impaire :

$$x \in [-1,1] \quad \begin{cases} y^+(x, \gamma^2) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{k=0}^{+\infty} d_k^{+, \mu}(\gamma^2) x^{2k} \\ y^-(x, \gamma^2) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{k=0}^{+\infty} d_k^{-, \mu}(\gamma^2) x^{2k+1} \end{cases}$$

Avec l'équivalence entre fonctions sphéroïdales et hyper-sphéroïdales établie précédemment en appliquant un développement de même nature aux fonctions hyper-sphéroïdales :

$$x \in [-1,1] \quad \begin{cases} y^+(x, \lambda, \gamma^2) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{k=0}^{+\infty} d_k^{+, \mu}(\lambda, \gamma^2) x^{2k} \\ y^-(x, \lambda, \gamma^2) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{k=0}^{+\infty} d_k^{-, \mu}(\lambda, \gamma^2) x^{2k+1} \end{cases}$$

les relations de récurrence sur les coefficients sont les suivantes:

$$\begin{cases} A_k^{\pm} d_{k-1}^{\pm, \mu}(\lambda, \gamma^2) + (\gamma^2 + \tilde{\omega}(\lambda, \gamma^2) - B_k^{\pm}) d_k^{\pm, \mu}(\lambda, \gamma^2) + C_k^{\pm} d_{k+1}^{\pm, \mu}(\lambda, \gamma^2) = 0 \\ \begin{cases} A_k^+ = -\gamma^2 \\ B_k^+ = (\tilde{\mu} + 2k)(\tilde{\mu} + 2k + 1) \\ C_k^+ = (2k + 1)(2k + 2) \end{cases} \quad \begin{cases} A_k^- = -\gamma^2 \\ B_k^- = (\tilde{\mu} + 2k + 1)(\tilde{\mu} + 2k + 2) \\ C_k^- = (2k + 2)(2k + 3) \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_k^{\pm} d_{k-1}^{\pm, \mu}(\lambda, \gamma^2) + (B_k^{\pm} - \tilde{\omega}(\lambda, \gamma^2)) d_k^{\pm, \mu}(\lambda, \gamma^2) + C_k^{\pm} d_{k+1}^{\pm, \mu}(\lambda, \gamma^2) = 0 \\ \begin{cases} A_k^+ = \gamma^2 \\ B_k^+ = (\tilde{\mu} + 2k)(\tilde{\mu} + 2k + 1) - \gamma^2 \\ C_k^+ = -(2k + 1)(2k + 2) \end{cases} \quad \begin{cases} A_k^- = \gamma^2 \\ B_k^- = (\tilde{\mu} + 2k + 1)(\tilde{\mu} + 2k + 2) - \gamma^2 \\ C_k^- = -(2k + 2)(2k + 3) \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Départ de récurrence} \quad d_{-1}^{\pm, \mu}(\lambda, \gamma^2) = 0 \quad \tilde{\mu} = \mu + \lambda - \frac{1}{2} \quad \tilde{\omega}(\lambda, \gamma^2) = \omega(\lambda, \gamma^2) + \lambda^2 - \frac{1}{4}$$

Le développement de Mac-Laurin en puissance de x présente la récurrence suivante :

$$x \in [-1,1] \quad y(x, \lambda, \gamma^2) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{k=0}^{+\infty} d_k^{\mu}(\lambda, \gamma^2) x^k$$

$$\begin{cases} A_k d_{k-2}^{\mu}(\lambda, \gamma^2) + (\gamma^2 + \tilde{\omega}(\lambda, \gamma^2) - B_k) d_k^{\mu}(\lambda, \gamma^2) + C_k d_{k+2}^{\mu}(\lambda, \gamma^2) = 0 \\ \begin{cases} A_k = -\gamma^2 \\ B_k = (\tilde{\mu} + k)(\tilde{\mu} + k + 1) \\ C_k = (k + 1)(k + 2) \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_k d_{k-2}^{\mu}(\lambda, \gamma^2) + (B_k - \tilde{\omega}(\lambda, \gamma^2)) d_k^{\mu}(\lambda, \gamma^2) + C_k d_{k+2}^{\mu}(\lambda, \gamma^2) = 0 \\ \begin{cases} A_k = \gamma^2 \\ B_k = (\tilde{\mu} + k)(\tilde{\mu} + k + 1) - \gamma^2 \\ C_k = -(k + 1)(k + 2) \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Départ de récurrence} \quad d_{-1}^{\mu}(\lambda, \gamma^2) = 0 \quad \tilde{\mu} = \mu + \lambda - \frac{1}{2} \quad \tilde{\omega}(\lambda, \gamma^2) = \omega(\lambda, \gamma^2) + \lambda^2 - \frac{1}{4}$$

Développement des fonctions hyper-sphéroïdales angulaires régulière autour de $x=\infty$

Par similitude et conformément aux ouvrages de F . M . Arscott . I . N . Sneddon . M . Stark . S . Ulam « Periodic Differential Equations , Spheroidal Wave Equation » page 172 et suivantes, section 8.2 « Solutions valid near $z=\infty$ » formules (2) et (3), et de J.Meixner.F.W.Schafke « Sphaeroid funktionen » page 260 et suivantes, section 3.41, « Laurent-Entwicklungen um $z=\infty$ », 3.411 « Bezeichnungen. Rekursionformel » formules (2) et (8) est proposé un développement des fonctions hyper-sphéroïdales angulaires autour de $x=\infty$ sous la forme d'une série de Laurent :

$$x \in [1, \infty] \quad y(x, \gamma^2) = (x^2 - 1)^{\frac{\mu}{2}} x^{\nu - \tilde{\mu}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_{\nu, 2k}^{\mu}(\lambda, \gamma^2) x^{2k} = (x^2 - 1)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_{\nu, 2k}^{\mu}(\lambda, \gamma^2) x^{2k + \nu - \tilde{\mu}} \quad \tilde{\mu} = \mu + \lambda - \frac{1}{2} \quad \tilde{\omega}(\lambda, \gamma^2) = \omega(\lambda, \gamma^2) + \lambda^2 - \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} A_k d_{2k-2}^{\mu}(\lambda, \gamma^2) + (\gamma^2 + \tilde{\omega}(\lambda, \gamma^2) - B_k) d_{2k}^{\mu}(\lambda, \gamma^2) + C_k d_{2k+2}^{\mu}(\lambda, \gamma^2) = 0 \\ A_k = -\gamma^2 \\ B_k = (\nu + 2k)(\nu + 2k + 1) \\ C_k = (\nu - \tilde{\mu} + 2k + 1)(\nu - \tilde{\mu} + 2k + 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_k d_{2k-2}^{\mu}(\lambda, \gamma^2) + (B_k - \tilde{\omega}(\lambda, \gamma^2)) d_{2k}^{\mu}(\lambda, \gamma^2) + C_k d_{2k+2}^{\mu}(\lambda, \gamma^2) = 0 \\ A_k = \gamma^2 \\ B_k = (\nu + 2k)(\nu + 2k + 1) - \gamma^2 \\ C_k = -(\nu - \tilde{\mu} + 2k + 1)(\nu - \tilde{\mu} + 2k + 2) \end{cases}$$

Développement des fonctions hyper-sphéroïdales angulaires régulières en puissance de $1 - x^2$

Dans l'ouvrage de Carson Flammer « Spheroidal Wave Functions » page 22 et suivantes, section 3.2 formules (3.2.7.a) et (3.2.7.b) est proposé un développement en puissance de $1 - x^2$ sous forme paire ou impaire que l'on peut tout autant appliquer aux fonctions hyper-sphéroïdales :

$$x \in [-1, 1] \quad \begin{cases} y^+(x, \lambda, \gamma^2) = (1 - x^2)^{\frac{\mu}{2}} \times \sum_{k=0}^{+\infty} d_k^{+, \mu}(\lambda, \gamma^2) (1 - x^2)^k \\ y^-(x, \lambda, \gamma^2) = x (1 - x^2)^{\frac{\mu}{2}} \times \sum_{k=0}^{+\infty} d_k^{-, \mu}(\lambda, \gamma^2) (1 - x^2)^k \end{cases}$$

En injectant ces développement dans l'équation sphéroïdale de départ, on obtient les relations de récurrence suivantes sur les coefficients :

$$\begin{cases} A_k^{\pm} d_{k-1}^{\pm, \mu}(\lambda, \gamma^2) + (B_k^{\pm} - \tilde{\omega}(\lambda, \gamma^2)) d_k^{\pm, \mu}(\lambda, \gamma^2) + C_k^{\pm} d_{k+1}^{\pm, \mu}(\lambda, \gamma^2) = 0 \\ A_k^+ = -\gamma^2 \\ B_k^+ = (\tilde{\mu} + 2k)(\tilde{\mu} + 2k + 1) \\ C_k^+ = -4(k + 1)(k + 1 + \tilde{\mu}) \end{cases} \quad \begin{cases} A_k^- = -\gamma^2 \\ B_k^- = (\tilde{\mu} + 2k + 1)(\tilde{\mu} + 2k + 2) \\ C_k^- = -4(k + 1)(k + 1 + \tilde{\mu}) \end{cases} \quad \tilde{\mu} = \mu + \lambda - \frac{1}{2} \quad \tilde{\omega}(\lambda, \gamma^2) = \omega(\lambda, \gamma^2) + \lambda^2 - \frac{1}{4}$$

Départ de récurrence $d_{-1}^{\pm, \mu}(\lambda, \gamma^2) = 0$

Développement des fonctions hyper-sphéroïdales radiales allongées régulières en puissance de $x^2 - 1$

Si l'on propose pour la fonction radiale hyper-sphéroïdale un développement en puissance de $x^2 - 1$ sous forme paire ou impaire :

$$x \in [1, \infty] \quad \begin{cases} y^+(x, \lambda, \gamma^2) = (x^2 - 1)^{\frac{\mu}{2}} \times \sum_{k=0}^{+\infty} d_k^{+, \mu}(\lambda, \gamma^2) (x^2 - 1)^k \\ y^-(x, \lambda, \gamma^2) = x (x^2 - 1)^{\frac{\mu}{2}} \times \sum_{k=0}^{+\infty} d_k^{-, \mu}(\lambda, \gamma^2) (x^2 - 1)^k \end{cases}$$

En injectant ces développement dans l'équation hyper-sphéroïdale de départ, on obtient les relations de récurrence suivantes sur les coefficients :

$$\begin{cases} A_k^{\pm} d_{k-1}^{\pm, \mu}(\lambda, \gamma^2) + (B_k^{\pm} - \tilde{\omega}(\lambda, \gamma^2)) d_k^{\pm, \mu}(\lambda, \gamma^2) + C_k^{\pm} d_{k+1}^{\pm, \mu}(\lambda, \gamma^2) = 0 & \tilde{\mu} = \mu + \lambda - \frac{1}{2} & \tilde{\omega}(\lambda, \gamma^2) = \omega(\lambda, \gamma^2) + \lambda^2 - \frac{1}{4} \\ \begin{cases} A_k^+ = \gamma^2 \\ B_k^+ = (\tilde{\mu} + 2k)(\tilde{\mu} + 2k + 1) \\ C_k^+ = 4(k+1)(k+1 + \tilde{\mu}) \end{cases} & \begin{cases} A_k^- = \gamma^2 \\ B_k^- = (\tilde{\mu} + 2k + 1)(\tilde{\mu} + 2k + 2) \\ C_k^- = 4(k+1)(k+1 + \tilde{\mu}) \end{cases} \end{cases}$$

Départ de récurrence $d_{-1}^{\pm, m}(\lambda, \gamma^2) = 0$

Développement des fonctions hyper-sphéroïdales radiales aplaties régulières en puissance de $1 + x^2$

Si l'on propose pour la fonction radiale hyper-sphéroïdale aplatie un développement en puissance de $1 + x^2$ sous forme paire ou impaire :

$$x \in [1, \infty] \quad \begin{cases} y^+(x, \lambda, \gamma^2) = (1 + x^2)^{\frac{\mu}{2}} \times \sum_{k=0}^{+\infty} d_k^{+, \mu}(\lambda, \gamma^2) (1 + x^2)^k \\ y^-(x, \lambda, \gamma^2) = x (1 + x^2)^{\frac{\mu}{2}} \times \sum_{k=0}^{+\infty} d_k^{-, \mu}(\lambda, \gamma^2) (1 + x^2)^k \end{cases}$$

En injectant ces développement dans l'équation hyper-sphéroïdale radiale aplatie de départ:

$$(1 + x^2) y''(x) + (2\lambda + 1) x y'(x) - \left(\omega - \gamma^2 (1 + x^2) - \frac{\mu(\mu + 2\lambda - 1)}{1 + x^2} \right) y(x) = 0$$

on obtient les relations de récurrence suivantes sur les coefficients :

$$\begin{cases} A_k^{\pm} d_{k-1}^{\pm, \mu}(\lambda, \gamma^2) + (B_k^{\pm} - \tilde{\omega}(\lambda, \gamma^2)) d_k^{\pm, \mu}(\lambda, \gamma^2) + C_k^{\pm} d_{k+1}^{\pm, \mu}(\lambda, \gamma^2) = 0 & \tilde{\mu} = \mu + \lambda - \frac{1}{2} & \tilde{\omega}(\lambda, \gamma^2) = \omega(\lambda, \gamma^2) + \lambda^2 - \frac{1}{4} \\ \begin{cases} A_k^+ = \gamma^2 \\ B_k^+ = (\tilde{\mu} + 2k)(\tilde{\mu} + 2k + 1) \\ C_k^+ = -4(k+1)(k+1 + \tilde{\mu}) \end{cases} & \begin{cases} A_k^- = \gamma^2 \\ B_k^- = (\tilde{\mu} + 2k + 1)(\tilde{\mu} + 2k + 2) \\ C_k^- = -4(k+1)(k+1 + \tilde{\mu}) \end{cases} \end{cases}$$

Départ de récurrence $d_{-1}^{\pm, m}(\lambda, \gamma^2) = 0$

Développement de la fonction d'onde hyper-sphéroïdale radiale valable pour les valeurs μ, λ entières

Au paragraphe 3.65 de l'ouvrage «Sphaeroid funktionen » de J.Meixner et F.W.Schafke en formule (49) page 293, les auteurs proposent un développement des deux solutions radiales sphéroïdales de troisième et quatrième espèce qui est valable quelque soit les valeurs de μ , pour z dans tout le plan complexe , notamment pour les valeurs réelles de z de 1 à $+\infty$ et hormis le demi-axe

des réels de $-\infty$ à 1 :

$$S_v^{(3)\mu}(z, \gamma^2) = \frac{(z^2 - 1)^{\frac{\mu}{2}} z^{\mu-1}}{\gamma} \times e^{i\left(\gamma z - \frac{v+1}{2}\pi\right)} \times \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{v,l}^{\mu} \frac{z^{-l}}{(-2i\gamma)^l} .$$

En injectant cette forme

$$S_v^{(4)\mu}(z, \gamma^2) = \frac{(z^2 - 1)^{\frac{\mu}{2}} z^{\mu-1}}{\gamma} \times e^{-i\left(\gamma z - \frac{v+1}{2}\pi\right)} \times \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{v,l}^{\mu} \frac{z^{-l}}{(2i\gamma)^l}$$

dans l'équation des ondes sphéroïdales et si la forme proposée par Meixner et Schafke respecte la condition de normalisation des fonctions sphéroïdales radiales à l'infini, alors les coefficients du développement suivent une relation de récurrence à 4 termes :

$$\begin{cases} 4\gamma^2(l-\mu)(l-\mu-1)A_{v,l-2}^{\mu} + 4\gamma^2(l-\mu)A_{v,l-1}^{\mu} + (l(l+1)-\omega)A_{v,l}^{\mu} + (l+1)A_{v,l+1}^{\mu} = 0 \\ A_{v,-2}^{\mu} = A_{v,-1}^{\mu} = 0 \quad A_{v,0}^{\mu} = 1 \end{cases}$$

On peut étendre ce résultat également pour l'équation hyper-sphéroïdale en proposant un développement de la forme :

$$HS_v^{(3)\lambda,\mu}(z, \gamma^2) = \frac{(z^2 - 1)^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} z^{\mu+\lambda-\frac{3}{2}}}{\gamma^{\frac{2\lambda+1}{2}}} \times e^{i\left(\gamma z - \frac{v+1}{2}\pi - \pi \times \frac{2\lambda-1}{4}\right)} \times \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{v,l}^{\mu} \frac{z^{-l}}{(-2i\gamma)^l} \underset{z \rightarrow \infty}{\approx} \frac{1}{(\gamma z)^{\frac{2\lambda+1}{2}}} \times e^{i\left(\gamma z - \frac{v+1}{2}\pi - \pi \times \frac{2\lambda-1}{4}\right)}$$

$$HS_v^{(4)\lambda,\mu}(z, \gamma^2) = \frac{(z^2 - 1)^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} z^{\mu+\lambda-\frac{3}{2}}}{\gamma^{\frac{2\lambda+1}{2}}} \times e^{-i\left(\gamma z - \frac{v+1}{2}\pi - \pi \times \frac{2\lambda-1}{4}\right)} \times \sum_{l=0}^{l=+\infty} A_{v,l}^{\mu} \frac{z^{-l}}{(2i\gamma)^l} \underset{z \rightarrow \infty}{\approx} \frac{1}{(\gamma z)^{\frac{2\lambda+1}{2}}} \times e^{-i\left(\gamma z - \frac{v+1}{2}\pi - \pi \times \frac{2\lambda-1}{4}\right)}$$

Si la forme proposée doit respecter la condition de normalisation des fonctions hyper-sphéroïdales radiales à l'infini, alors :

$$HS_v^{(1)\lambda,\mu}(z, \gamma^2) \approx \frac{\cos\left(\gamma z - \frac{v+1}{2}\pi - \pi \times \frac{2\lambda-1}{4}\right)}{(\gamma z)^{\frac{2\lambda+1}{2}}} \quad HS_v^{(2)\lambda,\mu}(z, \gamma^2) \approx \frac{\sin\left(\gamma z - \frac{v+1}{2}\pi - \pi \times \frac{2\lambda-1}{4}\right)}{(\gamma z)^{\frac{2\lambda+1}{2}}}$$

$$HS_v^{(3)\lambda,\mu}(z, \gamma^2) = HS_v^{(1)\lambda,\mu}(z, \gamma^2) + i HS_v^{(2)\lambda,\mu}(z, \gamma^2) \approx \frac{e^{i\left(\gamma z - \frac{v+1}{2}\pi - \pi \times \frac{2\lambda-1}{4}\right)}}{(\gamma z)^{\frac{2\lambda+1}{2}}} A_{v,0}^{\mu}$$

$$HS_v^{(4)\lambda,\mu}(z, \gamma^2) = HS_v^{(1)\lambda,\mu}(z, \gamma^2) - i HS_v^{(2)\lambda,\mu}(z, \gamma^2) \approx \frac{e^{-i\left(\gamma z - \frac{v+1}{2}\pi - \pi \times \frac{2\lambda-1}{4}\right)}}{(\gamma z)^{\frac{2\lambda+1}{2}}} A_{v,0}^{\mu} \Rightarrow A_{v,0}^{\mu} = 1$$

Et la relation de récurrence est définie comme suit :

$$\begin{cases} \gamma^2(2l+1-2\lambda-2\mu)(2l-1-2\lambda-2\mu)A_{v,l-2}^{\lambda,\mu} + 2\gamma^2(2l+1-2\lambda-2\mu)A_{v,l-1}^{\lambda,\mu} + \left(\frac{(2l+1-2\lambda)(2l+1+2\lambda)}{4} - \omega\right)A_{v,l}^{\lambda,\mu} + (l+1)A_{v,l+1}^{\lambda,\mu} = 0 \\ A_{v,-2}^{\lambda,\mu} = A_{v,-1}^{\lambda,\mu} = 0 \quad A_{v,0}^{\mu} = 1 \end{cases}$$

Dans le cas où $\mu+\lambda$ est entier alors cette récurrence est parfaitement définie pour toute valeurs de l'indice l , et la forme des fonctions radiales de première et deuxième espèce définie comme suit est donc parfaitement définie pour $\mu+\lambda$ entier et $v+\lambda$ entier, cas qui nous occupe particulièrement car jusqu'à présent aucun développement n'était défini pour ce cas.

$$HS_v^{(1)\lambda,\mu}(z,\gamma^2) = \text{Re} \left\{ \left(1 - \frac{1}{z^2}\right)^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} \times \frac{e^{i\left(\gamma z - \frac{v+1}{2}\pi - \frac{2\lambda-1}{4}\pi\right)}}{(\gamma z)^{\frac{2\lambda+1}{2}}} \times \sum_{l=0}^{l=\infty} A_{v,l}^{\lambda,\mu} \frac{z^{-l}}{(-2i\gamma)^l} \right\} \quad HS_v^{(2)\lambda,\mu}(z,\gamma^2) = \text{Im} \left\{ \left(1 - \frac{1}{z^2}\right)^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} \times \frac{e^{i\left(\gamma z - \frac{v+1}{2}\pi - \frac{2\lambda-1}{4}\pi\right)}}{(\gamma z)^{\frac{2\lambda+1}{2}}} \times \sum_{l=0}^{l=\infty} A_{v,l}^{\lambda,\mu} \frac{z^{-l}}{(-2i\gamma)^l} \right\}$$

Réécrivons la récurrence ainsi :

$$\begin{cases} 4\gamma^2\left(l-\lambda-\mu+\frac{1}{2}\right)\left(l-\lambda-\mu-\frac{1}{2}\right)A_{v,l-2}^{\lambda,\mu} + 4\gamma^2\left(l-\lambda-\mu+\frac{1}{2}\right)A_{v,l-1}^{\lambda,\mu} + \left(\frac{(2l+1-2\lambda)(2l+1+2\lambda)}{4} - \omega\right)A_{v,l}^{\lambda,\mu} + (l+1)A_{v,l+1}^{\lambda,\mu} = 0 \\ A_{v,-2}^{\lambda,\mu} = A_{v,-1}^{\lambda,\mu} = 0 \quad A_{v,0}^{\mu} = 1 \end{cases}$$

Lorsque maintenant $\mu+\lambda-1/2$ est entier (soit $\mu+\lambda$ demi-entier) , alors la récurrence s'arrête à l'indice $l=\mu+\lambda-3/2$. En effet d'après la forme de la récurrence précédente, comme les premier et deuxième coefficients s'annulent simultanément pour $l=k_0+1=\mu+\lambda-1/2$ et $l=k_0+2$ et le deuxième coefficient s'annule pour $l=k_0+2=\mu+\lambda+1/2$, alors les coefficients du développement s'annulent tous pour $l>k_0=\mu+\lambda-3/2$ (voir appendice n°2, propriété n°2 des récurrences à 4 termes, document de présentation des fonctions sphéroïdales). On parvient donc aux développements :

$$HS_v^{(1)\lambda,\mu}(z,\gamma^2) = \text{Re} \left\{ \left(1 - \frac{1}{z^2}\right)^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} \times \frac{e^{i\left(\gamma z - \frac{v+1}{2}\pi - \frac{2\lambda-1}{4}\pi\right)}}{(\gamma z)^{\frac{2\lambda+1}{2}}} \times \sum_{l=0}^{l=\mu+\lambda-\frac{3}{2}} A_{v,l}^{\mu} \frac{z^{-l}}{(-2i\gamma)^l} \right\} \quad HS_v^{(2)\lambda,\mu}(z,\gamma^2) = \text{Im} \left\{ \left(1 - \frac{1}{z^2}\right)^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} \times \frac{e^{i\left(\gamma z - \frac{v+1}{2}\pi - \frac{2\lambda-1}{4}\pi\right)}}{(\gamma z)^{\frac{2\lambda+1}{2}}} \times \sum_{l=0}^{l=\mu+\lambda-\frac{3}{2}} A_{v,l}^{\mu} \frac{z^{-l}}{(-2i\gamma)^l} \right\}$$

Il s'agit bien évidemment des développements des solutions algébriques dont nous avons décrit la construction auparavant dans ce document puisqu'ils peuvent également s'écrire sous la forme :

$$HS_v^{(1)\lambda,\mu}(z,\gamma^2) = \operatorname{Re} \left\{ (z^2 - 1)^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} \times z^{\mu+\lambda-\frac{3}{2}} \times \frac{e^{i\left(\gamma z - \frac{\nu+1}{2}\pi - \frac{2\lambda-1}{4}\pi\right)}}{\gamma^{\frac{2\lambda+1}{2}}} \times \sum_{l=0}^{l=\mu+\lambda-\frac{3}{2}} A_{v,l}^{\mu} \frac{z^{-l}}{(-2i\gamma)^l} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ (z^2 - 1)^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} \times \frac{e^{i\left(\gamma z - \frac{\nu+1}{2}\pi - \frac{2\lambda-1}{4}\pi\right)}}{\gamma^{\frac{2\lambda+1}{2}}} \times \sum_{l=0}^{l=\mu+\lambda-\frac{3}{2}} A_{v,l}^{\mu} \frac{z^{\mu+\lambda-\frac{3}{2}-l}}{(-2i\gamma)^l} \right\}$$

$$k = \mu + \lambda - \frac{3}{2} - l \Rightarrow HS_v^{(1)\lambda,\mu}(z,\gamma^2) = \operatorname{Re} \left\{ (z^2 - 1)^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} \times \frac{e^{i\left(\gamma z - \frac{\nu+1}{2}\pi - \frac{2\lambda-1}{4}\pi\right)}}{\gamma^{\frac{2\lambda+1}{2}}} \times \sum_{k=0}^{k=\mu+\lambda-\frac{3}{2}} A_{v,\mu+\lambda-\frac{3}{2}-k}^{\mu} \frac{z^k}{(-2i\gamma)^{\mu+\lambda-\frac{3}{2}-k}} \right\}$$

Soit la forme $HS_v^{(1)\lambda,\mu}(z,\gamma^2) = \operatorname{Re} \left\{ (z^2 - 1)^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} \times \frac{e^{i\left(\gamma z - \frac{\nu+1}{2}\pi - \frac{2\lambda-1}{4}\pi\right)}}{\gamma^{\frac{2\lambda+1}{2}}} \times P_{\mu+\lambda-\frac{3}{2}}(z) \right\}$ où $P_{\mu+\lambda-\frac{3}{2}}(z)$ est un

polynôme en z de degré au plus égal à $\mu+\lambda-3/2$. En posant $m = \mu+\lambda-1/2$. $P_{m-1}(z)$ est un polynôme en z de degré au plus égal à $m-1$.

Développement alternatif des fonctions hyper-sphéroïdales radiales ou angulaires en fonctions de Bessel et en fonctions de Gegenbauer associées (« On the Cut »)

Il est également possible de développer les solutions radiales de l'équation des ondes hyper-sphéroïdales avec les séries suivantes des fonctions de Bessel :

$$x \in [1, \infty] \quad \begin{cases} y_1(x) = (x^2 - 1)^{\frac{\lambda}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k J_{2k+\nu}(\gamma \sqrt{x^2 - 1}) \\ y_2(x) = x (x^2 - 1)^{-\frac{\lambda+1}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k J_{2k+\nu}(\gamma \sqrt{x^2 - 1}) \end{cases} \quad \text{avec} \quad a_k = a_k(\nu, \mu, \gamma^2, \lambda, \omega) \quad b_k = b_k(\nu, \mu, \gamma^2, \lambda, \omega)$$

Pour cela il suffit d'injecter les deux formes respectivement dans l'équation des ondes sphéroïdales, mais en ayant soin de transformer cette équation à l'aide des différents changements de variable suivants :

$$\begin{aligned} (1-x^2)y''(x) - (2\lambda+1)x y'(x) + \left(\omega + \gamma^2(1-x^2) - \frac{\mu(\mu+2\lambda-1)}{1-x^2} \right) y(x) &= 0 \\ \begin{cases} t = \gamma \sqrt{1-x^2} \Rightarrow (t^2 + \gamma^2)y''(t) + \left((2\lambda+1)t + \frac{2\gamma^2}{\lambda t} \right) y'(t) + \left(t^2 - \frac{\gamma^2 \mu(\mu+2\lambda-1)}{t^2} - \omega \right) y(t) = 0 \\ y(t) = \frac{w(t)}{t^\lambda} \Rightarrow (t^2 + \gamma^2)w''(t) + t w'(t) + \left(t^2 - \lambda^2 - \frac{\gamma^2(\lambda+\mu)(\lambda+\mu-1)}{t^2} - \omega \right) w(t) = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} t = \gamma \sqrt{1-x^2} \\ y(x) = x g(x) = \frac{1}{\gamma} \sqrt{t^2 + \gamma^2} w(t) \Rightarrow (t^2 + \gamma^2)g''(t) + \left((3\lambda+2)t + \frac{2\gamma^2}{\lambda t} \right) g'(t) + \left(2\lambda+1+t^2 - \frac{\gamma^2 \mu(\mu+2\lambda-1)}{t^2} - \omega \right) g(t) = 0 \\ g(t) = \frac{w(t)}{t^{\lambda+1}} \Rightarrow (t^2 + \gamma^2)w''(t) + \left(t - \frac{2\gamma^2}{t} \right) w'(t) + \left(t^2 - \lambda^2 - \frac{\gamma^2(\lambda+\mu+1)(\lambda+\mu-2)}{t^2} - \omega \right) w(t) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

A partir de ces deux transformations, on injecte le développement de la fonction $w(t)$ en fonction de Bessel J , et l'on utilise les relations suivantes qui permettent de linéariser le développement à ces plus proches voisins, à savoir :

$$\begin{cases} t^2 J_{2k+\nu}''(t) = -t J_{2k+\nu}'(t) - (t^2 - (2k+\nu)^2) J_{2k+\nu}(t) \\ J_{2k+\nu}''(t) = \frac{J_{-2+2k+\nu}(t)}{4} - \frac{J_{2k+\nu}(t)}{2} + \frac{J_{2+2k+\nu}(t)}{4} \\ \frac{J_{2k+\nu}(t)}{t^2} = \frac{J_{-2+2k+\nu}(t)}{4(2k+\nu)(2k+\nu-1)} + \frac{J_{2k+\nu}(t)}{2(2k+\nu+1)(2k+\nu-1)} + \frac{J_{2+2k+\nu}(t)}{4(2k+\nu)(2k+\nu+1)} \\ \frac{J_{2k+\nu}'(t)}{t} = \frac{J_{-2+2k+\nu}(t)}{4(2k+\nu-1)} + \frac{J_{2k+\nu}(t)}{2(2k+\nu+1)(2k+\nu-1)} - \frac{J_{2+2k+\nu}(t)}{4(2k+\nu+1)} \end{cases}$$

En injectant le même développement dans la première équation différentielle et par l'annulation du terme $J_{2k+\nu}(t)$, on parvient à la récurrence à 3 termes suivantes :

$$\begin{aligned} w(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k J_{2k+\nu}(t) \rightarrow (t^2 + \gamma^2)w''(t) + t w'(t) + \left(t^2 - \lambda^2 - \frac{\gamma^2(\lambda+\mu)(\lambda+\mu-1)}{t^2} - \omega \right) w(t) &= 0 \\ \gamma^2 \frac{(v+2k-1-\lambda-\mu)(v+2k-2+\mu+\lambda)}{4(v+2k-1)(v+2k-2)} a_{k-1} + \left((v+2k)^2 - \lambda^2 - \gamma^2 \frac{(v+2k-1)(v+2k+1)+\lambda(\lambda-1)+\mu(\mu+2\lambda-1)}{2(v+2k-1)(v+2k+1)} - \omega \right) a_k + \gamma^2 \frac{(v+2k+2-\mu-\lambda)(v+2k+1+\mu+\lambda)}{4(v+2k+1)(v+2k+2)} a_{k+1} &= 0 \end{aligned}$$

En injectant le même développement dans la seconde équation différentielle et par l'annulation du terme $J_{2k+\nu}(t)$, on parvient à la récurrence à 3 termes suivantes :

$$\begin{aligned} w(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k J_{2k+\nu}(t) \rightarrow (t^2 + \gamma^2)w''(t) + \left(t - \frac{2\gamma^2}{t} \right) w'(t) + \left(t^2 - \lambda^2 - \frac{\gamma^2(\lambda+\mu+1)(\lambda+\mu-2)}{t^2} - \omega \right) w(t) &= 0 \\ \gamma^2 \frac{(v+2k-\lambda-\mu)(v+2k-1+\mu+\lambda)}{4(v+2k-1)(v+2k-2)} b_{k-1} + \left((v+2k)^2 - \lambda^2 - \gamma^2 \frac{(v+2k-1)(v+2k+1)+\lambda(\lambda-1)+\mu(\mu+2\lambda-1)}{2(v+2k-1)(v+2k+1)} - \omega \right) b_k + \gamma^2 \frac{(v+2k+1-\mu-\lambda)(v+2k+\mu+\lambda)}{4(v+2k+1)(v+2k+2)} b_{k+1} &= 0 \end{aligned}$$

Effectuons le changement de paramètre suivant : $\nu = \tilde{\nu} + \lambda$ et l'on obtient pour les deux développements :

$$\begin{aligned}
 (1) & \left\{ \begin{aligned} & \gamma^2 \frac{(\tilde{\nu} - \mu + 2k - 1)(\tilde{\nu} + \mu + 2k - 2 + 2\lambda)}{4(\tilde{\nu} + 2k + \lambda - 2)(\tilde{\nu} + 2k + \lambda - 1)} a_{k-1} + \\ & \left((\tilde{\nu} + 2k)(\tilde{\nu} + 2k + 2\lambda) - \gamma^2 \frac{(\tilde{\nu} + 2k)(\tilde{\nu} + 2k + 2\lambda) + \mu^2 - 1 + (2\lambda - 1)(\mu + \lambda)}{2(\tilde{\nu} + 2k + \lambda - 1)(\tilde{\nu} + 2k + \lambda + 1)} - \omega \right) a_k + \\ & + \gamma^2 \frac{(\tilde{\nu} + \mu + 2k + 1 + 2\lambda)(\tilde{\nu} - \mu + 2k + 2)}{4(\tilde{\nu} + 2k + \lambda + 1)(\tilde{\nu} + 2k + \lambda + 2)} a_{k+1} = 0 \end{aligned} \right. \\
 (2) & \left\{ \begin{aligned} & \gamma^2 \frac{(\tilde{\nu} + \mu + 2k - 1 + 2\lambda)(\tilde{\nu} - \mu + 2k)}{4(\tilde{\nu} + 2k + \lambda - 1)(\tilde{\nu} + 2k + \lambda - 2)} b_{k-1} + \\ & \left((\tilde{\nu} + 2k)(\tilde{\nu} + 2k + 2\lambda) - \gamma^2 \frac{(\tilde{\nu} + 2k)(\tilde{\nu} + 2k + 2\lambda) + \mu^2 - 1 + (2\lambda - 1)(\mu + \lambda)}{2(\tilde{\nu} + 2k + \lambda - 1)(\tilde{\nu} + 2k + \lambda + 1)} - \omega \right) b_k + \\ & + \gamma^2 \frac{(\tilde{\nu} - \mu + 2k + 1)(\tilde{\nu} + \mu + 2k + 2\lambda)}{(\tilde{\nu} + 2k + \lambda + 1)(\tilde{\nu} + 2k + \lambda + 2)} b_{k+1} = 0 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Ces deux récurrences peuvent être rapprochées de la récurrence obtenue pour la fonction sphéroïdale hyper-radiale à l'aide des fonctions de Bessel :

$$\left\{ \begin{aligned} & x \in [1, +\infty] \\ & \tilde{\nu} = \nu + \lambda \end{aligned} \right\} \Rightarrow HS_{\tilde{\nu}}^{(1)\lambda, \mu}(x, \gamma^2) = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{\mu}{2}} \times \frac{1}{(\gamma x)^\lambda} \times \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_{\tilde{\nu}, k}^{\lambda, \mu} J_{\tilde{\nu} + 2k}(\gamma x)$$

Qui s'exprime ainsi :

$$\left\{ \begin{aligned} & -\gamma^2 \frac{(\tilde{\nu} + \mu + 2k - 1 + 2\lambda)(\tilde{\nu} + \mu + 2k - 2 + 2\lambda)}{4(\tilde{\nu} + \lambda + 2k - 2)(\tilde{\nu} + \lambda + 2k - 1)} \times r_{\tilde{\nu}, k-1}^{\lambda, \mu} + \\ & \left((\tilde{\nu} + 2k)(\tilde{\nu} + 2k + 2\lambda) - \gamma^2 \frac{(\tilde{\nu} + 2k)(\tilde{\nu} + 2k + 2\lambda) + \mu^2 - 1 + (\mu + \lambda)(2\lambda - 1)}{2(\tilde{\nu} + \lambda + 2k - 1)(\tilde{\nu} + \lambda + 2k + 1)} - \omega \right) \times r_{\tilde{\nu}, k}^{\lambda, \mu} + \\ & -\gamma^2 \frac{(\tilde{\nu} - \mu + 2k + 1)(\tilde{\nu} - \mu + 2k + 2)}{4(\tilde{\nu} + \lambda + 2k + 1)(\tilde{\nu} + \lambda + 2k + 2)} \times r_{\tilde{\nu}, k+1}^{\lambda, \mu} = 0 \end{aligned} \right.$$

En effet en supposant

$$\left\{ \begin{aligned} & a_k = f(k) r_{\tilde{\nu}, k}^{\lambda, \mu} \\ & b_k = g(k) r_{\tilde{\nu}, k}^{\lambda, \mu} \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} & \frac{f(k-1)}{f(k)} = \tilde{f}(\tilde{\nu}, k) = -\frac{\tilde{\nu} + \mu + 2k + 2\lambda - 1}{\tilde{\nu} - \mu + 2k - 1} & \frac{f(k+1)}{f(k)} = \frac{1}{\tilde{f}(k+1)} = -\frac{\tilde{\nu} - \mu + 2k + 1}{\tilde{\nu} + \mu + 2k + 1 + 2\lambda} \\ & \frac{g(k-1)}{g(k)} = \tilde{g}(\tilde{\nu}, k) = -\frac{\tilde{\nu} + \mu + 2k - 2 + 2\lambda}{\tilde{\nu} - \mu + 2k} & \frac{g(k+1)}{g(k)} = \frac{1}{\tilde{g}(k+1)} = -\frac{\tilde{\nu} - \mu + 2k + 2}{\tilde{\nu} + \mu + 2k + 2\lambda} \end{aligned} \right.$$

Alors on obtient la même récurrence que pour le développement classique avec les fonctions de Bessel. Cela a pour immédiate conséquence que les valeurs propres ω admissibles sont bien les mêmes et c'est tant mieux, sinon cela aurait été inquiétant.

Voyons maintenant si l'on peut relier les fonction $f(k)$ et $g(k)$ avec des valeurs connues de la fonction de Gegenbauer associée « On the Cut » notamment pour l'argument 0. Partant des expressions qui ne sont certes à valeur réelle que pour les valeurs de λ demi-entières ou μ entières :

$$z \in [-1,1] \rightarrow C_{\nu}^{\lambda,\mu}(z) = e^{i\pi\mu} \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}} \sqrt{\pi} \times \Gamma(\nu + \mu + 2\lambda)}{\Gamma(\nu - \mu + 1) \times \Gamma(\lambda)} (1 - z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z)$$

Il vient :

$$\begin{aligned} C_{\nu}^{\lambda,\mu}(0) &= \frac{e^{i\pi\mu} \times 2^{\frac{1-2\lambda}{2}} \sqrt{\pi} \times \Gamma(\nu + \mu + 2\lambda)}{\Gamma(\nu - \mu + 1) \times \Gamma(\lambda)} P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(0) \quad \text{Or} \quad P_{\nu}^{\mu}(0) = 2^{\mu} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-\mu-\nu}{2}\right) \Gamma\left(1-\frac{\mu-\nu}{2}\right)} \\ \Rightarrow P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(0) &= \frac{2^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu} \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}-\lambda-\mu\right)-\left(\lambda+\nu-\frac{1}{2}\right)}{2}\right) \Gamma\left(1-\frac{\left(\frac{1}{2}-\lambda-\mu\right)-\left(\lambda+\nu-\frac{1}{2}\right)}{2}\right)} = \frac{2^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu} \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1+\mu-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\lambda+\frac{1+\mu+\nu}{2}\right)} \\ \Rightarrow C_{\nu}^{\lambda,\mu}(0) &= \frac{e^{i\pi\mu} \times 2^{1-2\lambda-\mu} \pi}{\Gamma(\lambda)} \times \frac{\Gamma(\nu + \mu + 2\lambda)}{\Gamma(\nu - \mu + 1) \times \Gamma\left(\frac{1+\mu-\nu}{2}\right) \times \Gamma\left(\frac{\nu + \mu + 2\lambda + 1}{2}\right)} \\ \text{Or} \quad \Gamma(2z) &= \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \times \Gamma(z) \times \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{\Gamma(\nu + \mu + 2\lambda)}{\Gamma\left(\frac{\nu + \mu + 2\lambda + 1}{2}\right)} = \frac{2^{\nu+\mu+2\lambda-1}}{\sqrt{\pi}} \times \Gamma\left(\frac{\nu + \mu + 2\lambda}{2}\right) \Rightarrow C_{\nu}^{\lambda,\mu}(0) = \frac{e^{i\pi\mu} \times 2^{\nu} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} \times \frac{\Gamma\left(\frac{\nu + \mu + 2\lambda}{2}\right)}{\Gamma(\nu - \mu + 1) \times \Gamma\left(\frac{1+\mu-\nu}{2}\right)} \end{aligned}$$

Avec l'expression alternative de la fonction de Gegenbauer associée, la valeur en $z=0$ s'écrit :

$$z \in [-1,1] \rightarrow C_{\nu}^{\lambda,\mu}(z) = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} (1 - z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z) \rightarrow C_{\nu}^{\lambda,\mu}(0) = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \frac{2^{\mu} \pi}{\Gamma(\lambda) \times \Gamma\left(1-\lambda-\frac{\mu+\nu}{2}\right) \times \Gamma\left(1-\frac{\mu-\nu}{2}\right)}$$

Commençons par la fonction $f(k)$:

$$\Rightarrow C_{\tilde{\nu}+2k}^{\lambda,\mu}(0) = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \frac{2^{\mu} \pi}{\Gamma(\lambda) \times \Gamma\left(1-\lambda-\frac{\mu+\tilde{\nu}}{2}-k\right) \times \Gamma\left(1-\frac{\mu-\tilde{\nu}}{2}+k\right)} \rightarrow \frac{C_{\tilde{\nu}+2k+2}^{\lambda,\mu}(0)}{C_{\tilde{\nu}+2k}^{\lambda,\mu}(0)} = \frac{\Gamma\left(1-\lambda-\frac{\mu+\tilde{\nu}}{2}-k\right) \times \Gamma\left(1-\frac{\mu-\tilde{\nu}}{2}+k\right)}{\Gamma\left(-\lambda-\frac{\mu+\tilde{\nu}}{2}-k\right) \times \Gamma\left(1-\frac{\mu-\tilde{\nu}}{2}+k+1\right)} = -\frac{\tilde{\nu} + \mu + 2k + 2\lambda}{\tilde{\nu} - \mu + 2k + 2}$$

Avec la deuxième forme on parvient à la même expression et cela implique une valeur définie de la fonction $f(k)$:

$$\begin{aligned} \frac{C_{\tilde{\nu}+2k+2}^{\lambda,\mu}(0)}{C_{\tilde{\nu}+2k}^{\lambda,\mu}(0)} &= 4 \times \frac{\Gamma\left(\frac{\tilde{\nu} + \mu + 2\lambda}{2} + k + 1\right)}{\Gamma(\tilde{\nu} + 2k - \mu + 1 + 2) \times \Gamma\left(\frac{1+\mu-\tilde{\nu}}{2} - k - 1\right)} \frac{\Gamma(\tilde{\nu} + 2k - \mu + 1) \times \Gamma\left(\frac{1+\mu-\tilde{\nu}}{2} - k\right)}{\Gamma\left(\frac{\tilde{\nu} + \mu + 2\lambda}{2} + k\right)} = -\frac{\tilde{\nu} + \mu + 2k + 2\lambda}{\tilde{\nu} - \mu + 2k + 2} \\ \mu \rightarrow -\mu + 1 - 2\lambda &\Rightarrow \frac{C_{\tilde{\nu}+2k+2}^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(0)}{C_{\tilde{\nu}+2k}^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(0)} = -\frac{\tilde{\nu} - \mu + 1 - 2\lambda + 2k + 2\lambda}{\tilde{\nu} + \mu + 2\lambda - 1 + 2k + 2} = -\frac{\tilde{\nu} - \mu + 2k + 1}{\tilde{\nu} + \mu + 2\lambda + 2k + 1} = \frac{1}{\tilde{f}(k+1)} \Rightarrow \tilde{f}(k) = -\frac{\tilde{\nu} + \mu + 2k + 2\lambda - 1}{\tilde{\nu} - \mu + 2k - 1} \Rightarrow f(k) = C_{\tilde{\nu}+2k}^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(0) \end{aligned}$$

Qu'en est-il de la fonction $g(k)$:

$$\begin{aligned}
 C_{\nu}^{\lambda, \mu}(z) &= \frac{1}{z^2 - 1} \left(z^{\nu} C_{\nu}^{\lambda, \mu}(z) - (\mu + \nu + 2\lambda - 1) C_{\nu-1}^{\lambda, \mu}(z) \right) \Rightarrow C_{\nu}^{\lambda, \mu}(0) = (\mu + \nu + 2\lambda - 1) C_{\nu-1}^{\lambda, \mu}(0) = \frac{(\mu + \nu + 2\lambda - 1) \times (-1)^{\lambda - \frac{1}{2}} 2^{\mu} \pi}{\Gamma(\lambda) \times \Gamma\left(1 - \frac{\mu + \nu + 2\lambda - 1}{2}\right) \times \Gamma\left(\frac{1 - \mu + \nu}{2}\right)} \\
 \Rightarrow C_{\tilde{\nu}+2k}^{\lambda, \mu}(0) &= \frac{(\tilde{\nu} + \mu + 2\lambda - 1 + 2k) \times (-1)^{\lambda - \frac{1}{2}} 2^{\mu} \pi}{\Gamma(\lambda) \times \Gamma\left(1 - \frac{\mu + \tilde{\nu} + 2\lambda - 1}{2} - k\right) \times \Gamma\left(\frac{1 - \mu + \tilde{\nu}}{2} + k\right)} \Rightarrow \frac{C_{\tilde{\nu}+2k+2}^{\lambda, \mu}(0)}{C_{\tilde{\nu}+2k}^{\lambda, \mu}(0)} = -\frac{\tilde{\nu} + \mu + 2k + 2\lambda + 1}{\tilde{\nu} - \mu + 2k + 1} \\
 \mu \rightarrow -\mu + 1 - 2\lambda &\Rightarrow \frac{C_{\tilde{\nu}+2k}^{\lambda, -\mu+1-2\lambda}(0)}{C_{\tilde{\nu}+2k}^{\lambda, -\mu+1-2\lambda}(0)} = -\frac{\tilde{\nu} - \mu + 2k + 2}{\tilde{\nu} + \mu + 2k + 2\lambda} = \frac{1}{\tilde{g}(k+1)} \Rightarrow \tilde{g}(k) = \frac{C_{\tilde{\nu}+2k-2}^{\lambda, -\mu+1-2\lambda}(0)}{C_{\tilde{\nu}+2k}^{\lambda, -\mu+1-2\lambda}(0)} \Rightarrow g(k) = C_{\tilde{\nu}+2k}^{\lambda, -\mu+1-2\lambda}(0)
 \end{aligned}$$

De plus les deux récurrences sont également tout à fait valables par la transformation : $\mu \rightarrow -\mu + 1 - 2\lambda$.
Donc à ce stade on peut donc affirmer que les six développements suivants sont tous solutions de l'équation des ondes sphéroïdales :

$$\begin{cases}
 -\gamma^2 \frac{(\tilde{\nu} + \mu + 2k - 2 + 2\lambda)(\tilde{\nu} + \mu + 2k - 1 + 2\lambda)}{4(\tilde{\nu} + \lambda + 2k - 2)(\tilde{\nu} + \lambda + 2k - 1)} \times r_{\tilde{\nu}, k-1}^{\lambda, \mu} + \\
 + \left((\tilde{\nu} + 2k)(\tilde{\nu} + 2k + 2\lambda) - \gamma^2 \frac{(\tilde{\nu} + 2k)(\tilde{\nu} + 2k + 2\lambda) + \mu^2 - 1 + (\mu + \lambda)(2\lambda - 1)}{2(\tilde{\nu} + \lambda + 2k - 1)(\tilde{\nu} + \lambda + 2k + 1)} - \omega \right) \times r_{\tilde{\nu}, k}^{\lambda, \mu} + \\
 -\gamma^2 \frac{(\tilde{\nu} - \mu + 2k + 1)(\tilde{\nu} - \mu + 2k + 2)}{4(\tilde{\nu} + \lambda + 2k + 1)(\tilde{\nu} + \lambda + 2k + 2)} \times r_{\tilde{\nu}, k+1}^{\lambda, \mu} = 0
 \end{cases}$$

$$x \in [1, +\infty] \begin{cases}
 y(x) = (x^2 - 1)^{\frac{\mu}{2}} \times \frac{1}{x^{\mu + \lambda}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_{\tilde{\nu}, k}^{\lambda, \mu} J_{\tilde{\nu}+2k}(\gamma x) \\
 y(x) = (x^2 - 1)^{\frac{\mu + 2\lambda - 1}{2}} \times x^{\mu + \lambda - 1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_{\tilde{\nu}, k}^{\lambda, -\mu+1-2\lambda} J_{\tilde{\nu}+2k}(\gamma x) \\
 y(x) = (x^2 - 1)^{\frac{\lambda}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_{\tilde{\nu}, k}^{\lambda, \mu} C_{\tilde{\nu}+2k}^{\lambda, -\mu+1-2\lambda}(0) J_{2k+\tilde{\nu}}(\gamma \sqrt{x^2 - 1}) \\
 y(x) = (x^2 - 1)^{\frac{\lambda}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_{\tilde{\nu}, k}^{\lambda, -\mu+1-2\lambda} C_{\tilde{\nu}+2k}^{\lambda, \mu}(0) J_{2k+\tilde{\nu}}(\gamma \sqrt{x^2 - 1}) \\
 y(x) = x(x^2 - 1)^{\frac{\lambda+1}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_{\tilde{\nu}, k}^{\lambda, \mu} C_{\tilde{\nu}+2k}^{\lambda, -\mu+1-2\lambda}(0) J_{2k+\tilde{\nu}}(\gamma \sqrt{x^2 - 1}) \\
 y(x) = x(x^2 - 1)^{\frac{\lambda+1}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_{\tilde{\nu}, k}^{\lambda, -\mu+1-2\lambda} C_{\tilde{\nu}+2k}^{\lambda, \mu}(0) J_{2k+\tilde{\nu}}(\gamma \sqrt{x^2 - 1})
 \end{cases}$$

D'autre part on sait que les coefficients r de la récurrence sont liés aux coefficients de la récurrence du développement des fonctions angulaires, à savoir : $r_{\tilde{\nu}, k}^{\lambda, \mu}(\gamma^2) = d_{\tilde{\nu}, k}^{\lambda, -\mu+1-2\lambda}(\gamma^2)$, l'expression du développement en fonctions de Gegenbauer associées sur $[-1, +1]$ de la fonction angulaire de première espèce étant de la forme :

$$\begin{aligned}
 x \in [-1, 1] \quad hps_{\nu}^{\lambda, \mu}(x, \gamma^2) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k d_{\nu, k}^{\lambda, \mu}(\gamma^2) C_{\nu+2k}^{\lambda, \mu}(x) \quad A_k d_{\nu, k-1}^{\lambda, \mu}(\gamma^2) + (B_k - \omega(\gamma^2)) d_{\nu, k}^{\lambda, \mu}(\gamma^2) + C_k d_{\nu, k+1}^{\lambda, \mu}(\gamma^2) = 0 \\
 \begin{cases}
 A_k &= -\gamma^2 \frac{(\nu - \mu + 2k - 1)(\nu - \mu + 2k)}{(2\nu + 4k + 2\lambda - 4)(2\nu + 4k + 2\lambda - 2)} \\
 B_k &= (\nu + 2k)(\nu + 2k + 2\lambda) - 2\gamma^2 \frac{(\nu + 2k)(\nu + 2k + 2\lambda) + \mu^2 - 1 + (2\lambda - 1)(\mu + \lambda)}{(2\nu + 4k + 2\lambda - 2)(2\nu + 4k + 2\lambda + 2)} \\
 C_k &= -\gamma^2 \frac{(\nu + \mu + 2k + 2\lambda)(\nu + \mu + 2k + 2\lambda + 1)}{(2\nu + 4k + 2\lambda + 2)(2\nu + 4k + 2\lambda + 4)}
 \end{cases}
 \end{aligned}$$

On écrira donc les 6 développements précédents sous la forme :

$$A_k d_{\tilde{\nu},k-1}^{\lambda,\mu}(\gamma^2) + (B_k - \omega(\gamma^2)) d_{\tilde{\nu},k}^{\lambda,\mu}(\gamma^2) + C_k d_{\tilde{\nu},k+1}^{\lambda,\mu}(\gamma^2) = 0 \quad \begin{cases} A_k = -\gamma^2 \frac{(\tilde{\nu} - \mu + 2k - 1)(\tilde{\nu} - \mu + 2k)}{(2\tilde{\nu} + 4k + 2\lambda - 4)(2\tilde{\nu} + 4k + 2\lambda - 2)} \\ B_k = (\tilde{\nu} + 2k)(\tilde{\nu} + 2k + 2\lambda) - 2\gamma^2 \frac{(\tilde{\nu} + 2k)(\tilde{\nu} + 2k + 2\lambda) + \mu^2 - 1 + (2\lambda - 1)(\mu + \lambda)}{(2\tilde{\nu} + 4k + 2\lambda - 2)(2\tilde{\nu} + 4k + 2\lambda + 2)} \\ C_k = -\gamma^2 \frac{(\tilde{\nu} + \mu + 2k + 2\lambda)(\tilde{\nu} + \mu + 2k + 2\lambda + 1)}{(2\tilde{\nu} + 4k + 2\lambda + 2)(2\tilde{\nu} + 4k + 2\lambda + 4)} \end{cases}$$

$$x \in [1, +\infty] \quad \begin{cases} y(x) = (x^2 - 1)^{\frac{\mu}{2}} \times \frac{1}{x^{\mu+\lambda}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_{\tilde{\nu},k}^{\lambda,-\mu+1-2\lambda} J_{\tilde{\nu}+2k}(\gamma x) \\ y(x) = (x^2 - 1)^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} \times x^{\mu+\lambda-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_{\tilde{\nu},k}^{\lambda,\mu} J_{\tilde{\nu}+2k}(\gamma x) \\ y(x) = (x^2 - 1)^{\frac{\lambda}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_{\tilde{\nu},k}^{\lambda,-\mu+1-2\lambda} C_{\tilde{\nu}+2k}^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(0) J_{2k+\tilde{\nu}}(\gamma \sqrt{x^2-1}) \\ y(x) = (x^2 - 1)^{\frac{\lambda}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_{\tilde{\nu},k}^{\lambda,\mu} C_{\tilde{\nu}+2k}^{\lambda,\mu}(0) J_{2k+\tilde{\nu}}(\gamma \sqrt{x^2-1}) \\ y(x) = x(x^2 - 1)^{\frac{\lambda+1}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_{\tilde{\nu},k}^{\lambda,-\mu+1-2\lambda} C_{\tilde{\nu}+2k}^{-\mu+1-2\lambda}(0) J_{2k+\tilde{\nu}}(\gamma \sqrt{x^2-1}) \\ y(x) = x(x^2 - 1)^{\frac{\lambda+1}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_{\tilde{\nu},k}^{\lambda,\mu} C_{\tilde{\nu}+2k}^{\mu}(0) J_{2k+\tilde{\nu}}(\gamma \sqrt{x^2-1}) \end{cases}$$

Il est également possible de construire des développements à l'aide des fonctions de Bessel : $J_{k+\tilde{\nu}}(\gamma(x \pm 1))$. Comme suit :

$$x \in [1, +\infty] \quad y(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} \times (x+1)^{-\lambda} \times \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_{\tilde{\nu},k}^{\lambda,\mu} J_{\tilde{\nu}+k}(\gamma(x+1)) \quad \text{ou} \quad y(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} \times (x-1)^{-\lambda} \times \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{\tilde{\nu},k}^{\lambda,\mu} J_{\tilde{\nu}+k}(\gamma(x-1))$$

Pour cela il suffit d'abord de transformer l'équation différentielle des ondes sphéroïdales :

$$(1-x^2)y''(x) - (1+2\lambda)x y'(x) + \left(\omega + \gamma^2(1-x^2) - \frac{\mu(\mu+2\lambda-1)}{1-x^2}\right)y(x) = 0$$

$$\begin{cases} t = \gamma(x-1) \Rightarrow t(t+2\gamma) y''(t) + (1+2\lambda)(t+\gamma) y'(t) + \left(t(t+2\gamma) - \gamma^2 \frac{\mu(\mu+2\lambda-1)}{t(t+2\gamma)} - \omega\right) y(t) = 0 \\ y(t) = t^{\frac{\mu-1}{2}} (t+2\gamma)^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} w(t) \Rightarrow t(t+2\gamma) w''(t) + (t+\gamma(2\mu+2\lambda-1)) w'(t) + \left(-\lambda^2 + t(t+2\gamma) - \frac{\gamma(\mu+\lambda-1)}{t} - \omega\right) w(t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = \gamma(x+1) \Rightarrow t(t-2\gamma) y''(t) + (1+2\lambda)(t-\gamma) y'(t) + \left(t(t-2\gamma) - \gamma^2 \frac{\mu(\mu+2\lambda-1)}{t(t-2\gamma)} - \omega\right) y(t) = 0 \\ y(t) = t^{\frac{\mu-1}{2}} (t-2\gamma)^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} w(t) \Rightarrow t(t-2\gamma) w''(t) + (t-\gamma(2\mu+2\lambda-1)) w'(t) + \left(-\lambda^2 + t(t-2\gamma) + \frac{\gamma(\mu+\lambda-1)}{t} - \omega\right) w(t) = 0 \end{cases}$$

A partir de ces deux transformations, on injecte le développement de la fonction $w(t)$ en fonction de Bessel J , et l'on utilise les relations suivantes qui permettent de linéariser le développement à ces plus proches voisins, à savoir :

$$\begin{cases} t^2 J_{k+\nu}''(t) = -t J_{k+\nu}'(t) - (t^2 - (k+\nu)^2) J_{k+\nu}(t) \\ J_{k+\nu}'(t) = \frac{J_{k+\nu-1}(t)}{2} - \frac{J_{k+\nu+1}(t)}{2} \\ t J_{k+\nu}''(t) = -t J_{k+\nu}(t) + \frac{(k+\nu-1)J_{k+\nu-1}(t)}{2} - \frac{(k+\nu+1)J_{k+\nu+1}(t)}{2} \\ \frac{J_{k+\nu}(t)}{t} = \frac{J_{k+\nu-1}(t)}{2(k+\nu)} + \frac{J_{k+\nu+1}(t)}{2(k+\nu)} \end{cases}$$

Et l'on obtient deux récurrences à trois termes :

$$\left\{ \begin{array}{l} y(x) = \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} \times (x+1)^{-\lambda} \times \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{\tilde{\nu},k}^{\lambda,\mu} J_{\tilde{\nu}+k}(\gamma(x+1)) \\ -\gamma \frac{(2\nu+2k-1)(\nu+k-\mu-\lambda)}{2(\nu+k-1)} a_{\tilde{\nu},k-1}^{\lambda,\mu} + ((\nu+k+\lambda)(\nu+k-\lambda)-\omega) a_{\tilde{\nu},k}^{\lambda,\mu} - \gamma \frac{(2\nu+2k+1)(\nu+k+\mu+\lambda)}{2(\nu+k+1)} a_{\tilde{\nu},k+1}^{\lambda,\mu} = 0 \\ y(x) = \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} \times (x-1)^{-\lambda} \times \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{\tilde{\nu},k}^{\lambda,\mu} J_{\tilde{\nu}+k}(\gamma(x-1)) \\ \gamma \frac{(2\nu+2k-1)(\nu+k-\mu-\lambda)}{2(\nu+k-1)} b_{\tilde{\nu},k-1}^{\lambda,\mu} + ((\nu+k+\lambda)(\nu+k-\lambda)-\omega) b_{\tilde{\nu},k}^{\lambda,\mu} + \gamma \frac{(2\nu+2k+1)(\nu+k+\mu+\lambda)}{2(\nu+k+1)} b_{\tilde{\nu},k+1}^{\lambda,\mu} = 0 \end{array} \right.$$

Effectuons le changement de paramètre suivant : $\nu = \tilde{\nu} + \lambda$ et l'on obtient pour les deux développements :

$$\left\{ \begin{array}{l} y(x) = \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} \times (x+1)^{-\lambda} \times \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{\tilde{\nu},k}^{\lambda,\mu} J_{\tilde{\nu}+k}(\gamma(x+1)) \\ -\gamma \frac{(2\tilde{\nu}+2k+2\lambda-1)(\tilde{\nu}+k-\mu)}{2(\tilde{\nu}+k-1+\lambda)} a_{\tilde{\nu},k-1}^{\lambda,\mu} + ((\tilde{\nu}+k)(\tilde{\nu}+k+2\lambda)-\omega) a_{\tilde{\nu},k}^{\lambda,\mu} - \gamma \frac{(2\tilde{\nu}+2k+2\lambda+1)(\tilde{\nu}+j+\mu+2\lambda)}{2(\tilde{\nu}+k+1+\lambda)} a_{\tilde{\nu},k+1}^{\lambda,\mu} = 0 \\ y(x) = \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} \times (x-1)^{-\lambda} \times \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{\tilde{\nu},k}^{\lambda,\mu} J_{\tilde{\nu}+k}(\gamma(x-1)) \\ \gamma \frac{(2\tilde{\nu}+2k+2\lambda-1)(\tilde{\nu}+k-\mu)}{2(\tilde{\nu}+k-1+\lambda)} b_{\tilde{\nu},k-1}^{\lambda,\mu} + ((\tilde{\nu}+k)(\tilde{\nu}+k+2\lambda)-\omega) b_{\tilde{\nu},k}^{\lambda,\mu} + \gamma \frac{(2\tilde{\nu}+2k+2\lambda+1)(\tilde{\nu}+j+\mu+2\lambda)}{2(\tilde{\nu}+k+1+\lambda)} b_{\tilde{\nu},k+1}^{\lambda,\mu} = 0 \end{array} \right.$$

Dans ces conditions il est clair que : $b_{\tilde{\nu},k}^{\lambda,\mu} = (-1)^k a_{\tilde{\nu},k}^{\lambda,\mu}$. Aussi peut-on écrire également les développements suivants comme solutions radiales de l'équation des ondes sphéroïdales :

$$\left\{ \begin{array}{l} y(x) = \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} \times (x+1)^{-\lambda} \times \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{\tilde{\nu},k}^{\lambda,\mu} J_{\tilde{\nu}+k}(\gamma(x+1)) \\ y(x) = \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} \times (x-1)^{-\lambda} \times \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k a_{\tilde{\nu},k}^{\lambda,\mu} J_{\tilde{\nu}+k}(\gamma(x-1)) \\ y(x) = \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{\frac{\mu}{2}} \times (x+1)^{-\lambda} \times \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{\tilde{\nu},k}^{-\mu+1-2\lambda} J_{\tilde{\nu}+k}(\gamma(x+1)) \\ y(x) = \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{\frac{\mu}{2}} \times (x-1)^{-\lambda} \times \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k a_{\tilde{\nu},k}^{-\mu+1-2\lambda} J_{\tilde{\nu}+k}(\gamma(x-1)) \\ -\gamma \frac{(2\tilde{\nu}+2k+2\lambda-1)(\tilde{\nu}+k-\mu)}{2(\tilde{\nu}+k-1+\lambda)} a_{\tilde{\nu},k-1}^{\lambda,\mu} + ((\tilde{\nu}+k)(\tilde{\nu}+k+2\lambda)-\omega) a_{\tilde{\nu},k}^{\lambda,\mu} - \gamma \frac{(2\tilde{\nu}+2k+2\lambda+1)(\tilde{\nu}+j+\mu+2\lambda)}{2(\tilde{\nu}+k+1+\lambda)} a_{\tilde{\nu},k+1}^{\lambda,\mu} = 0 \end{array} \right.$$

Les deux développements précédents sont un cas particulier du développement possible suivant :

$$x \in [1, +\infty] \quad y(x) = ((x+1)(x-1))^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} (x-\alpha)^{\mu+\lambda-1} \times \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{\nu,k}^{\mu} J_{\nu+k}(\gamma(x-\alpha)) \quad \alpha = \pm 1$$

Pour cela il suffit d'abord de transformer l'équation différentielle des ondes hyper-sphéroïdales comme suit :

$$\begin{aligned} (1-x^2)y''(x) - (2\lambda+1)x y'(x) + \left(\gamma^2(1-x^2) - \frac{\mu(\mu+2\lambda-1)}{1-x^2} - \omega \right) y(x) &= 0 \\ \left\{ \begin{aligned} t = \gamma(x-\alpha) &\Rightarrow (t+\gamma(\alpha+1))(t+\gamma(\alpha-1)) y''(t) + (2\lambda+1)(t+\alpha\gamma) y'(t) + \left((t+\gamma(\alpha+1))(t+\gamma(\alpha-1)) - \gamma^2 \frac{\mu(\mu+2\lambda-1)}{(t+\gamma(\alpha+1))(t+\gamma(\alpha-1))} - \omega \right) y(t) = 0 \\ y(t) &= t^{\mu+\lambda-1} ((t+\gamma(\alpha+1))(t+\gamma(\alpha-1)))^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} w(t) \Rightarrow (t+\gamma(\alpha+1))(t+\gamma(\alpha-1)) w''(t) + \\ &+ \left(t + \alpha\gamma(2\mu+2\lambda-1) + \gamma^2 \frac{2(\alpha^2-1)(\mu+\lambda-1)}{t} \right) w'(t) + \\ &+ \left(t(t+2\alpha\gamma) + \gamma^2(\alpha^2-1) - \lambda^2 - \frac{\alpha\gamma(\mu+\lambda-1)}{t} + \gamma^2 \frac{(\alpha^2-1)(\mu+\lambda-1)(\mu+\lambda-2)}{t^2} - \omega \right) w(t) = 0 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

A partir de cette transformations, on injecte le développement de la fonction $w(t)$ en fonction de Bessel J , et l'on utilise les relations suivantes qui permettent de « linéariser » le développement à ces plus proches voisins, à savoir :

$$\left\{ \begin{aligned} t^2 J_{k+\nu}''(t) &= -t J_{k+\nu}'(t) - (t^2 - (k+\nu)^2) J_{k+\nu}(t) \\ J_{k+\nu}'(t) &= \frac{J_{k+\nu-1}(t)}{2} - \frac{J_{k+\nu+1}(t)}{2} \quad J_{k+\nu}''(t) = \frac{J_{k+\nu-2}(t)}{4} - \frac{J_{k+\nu}(t)}{2} + \frac{J_{k+\nu+2}(t)}{4} \\ t J_{k+\nu}''(t) &= -t J_{k+\nu}'(t) + \frac{(k+\nu-1)J_{k+\nu-1}(t)}{2} - \frac{(k+\nu+1)J_{k+\nu+1}(t)}{2} \\ \frac{J_{k+\nu}(t)}{t} &= \frac{J_{k+\nu-1}(t)}{2(k+\nu)} + \frac{J_{k+\nu+1}(t)}{2(k+\nu)} \Rightarrow \frac{J_{k+\nu+1}(t)}{t} = \frac{J_{k+\nu}(t)}{2(k+\nu+1)} + \frac{J_{k+\nu+2}(t)}{2(k+\nu+1)} \quad \frac{J_{k+\nu-1}(t)}{t} = \frac{J_{k+\nu-2}(t)}{2(k+\nu-1)} + \frac{J_{k+\nu}(t)}{2(k+\nu-1)} \\ \frac{J_{k+\nu}(t)}{t^2} &= \frac{J_{k+\nu-2}(t)}{4(k+\nu)(k+\nu-1)} + \frac{J_{k+\nu}(t)}{2(k+\nu-1)(k+\nu+1)} + \frac{J_{k+\nu+2}(t)}{4(k+\nu)(k+\nu+1)} \end{aligned} \right.$$

Obtenant une récurrence à cinq termes :

$$\left\{ \begin{aligned} y(x) &= ((x+1)(x-1))^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} (x-\alpha)^{\mu+\lambda-1} \times \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k J_{\nu+k}(\gamma(x-\alpha)) \\ \gamma^2(\alpha^2-1) \frac{(v+k-\mu-\lambda-1)(v+k-\mu-\lambda)}{4(v+k-1)(v+k-2)} a_{k-2} &+ \alpha\gamma \frac{(2v+2k-1)(v+k-\mu-\lambda)}{2(v+k-1)} a_{k-1} + \\ &+ \left((v+k+\lambda)(v+k-\lambda) + \gamma^2(\alpha^2-1) \times \frac{\mu^2-1+(v+k)^2+\lambda(\lambda-1)+\mu(2\lambda-1)}{2(v+k-1)(v+k+1)} - \omega \right) a_k + \\ &+ \alpha\gamma \frac{(2v+2k+1)(v+k+\mu+\lambda)}{2(v+k+1)} a_{k+1} + \gamma^2(\alpha^2-1) \frac{(v+k+\mu+\lambda)(v+k+\mu+\lambda+1)}{4(v+k+1)(v+k+2)} a_{k+2} = 0 \\ (\tilde{v}+k)(\tilde{v}+k+2\lambda) + \mu^2-1 + (2\lambda-1)(\mu+\lambda) & \end{aligned} \right.$$

Effectuons le changement de paramètre suivant : $\tilde{\nu} = \nu + \lambda$ et l'on obtient pour ce développement la récurrence à 5 termes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} y(x) = ((x+1)(x-1))^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} (x-\alpha)^{\mu+\lambda-1} \times \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{\tilde{\nu},k}^{\lambda,\mu} J_{\tilde{\nu}+k}(\gamma(x-\alpha)) \\ A_k a_{\tilde{\nu},k-2}^{\lambda,\mu} + B_k a_{\tilde{\nu},k-1}^{\lambda,\mu} + (C_k - \omega) a_{\tilde{\nu},k}^{\lambda,\mu} + D_k a_{\tilde{\nu},k+1}^{\lambda,\mu} + E_k a_{\tilde{\nu},k+2}^{\lambda,\mu} = 0 \\ A_k = \gamma^2 (\alpha^2 - 1) \frac{(\tilde{\nu} + k - \mu - 1)(\tilde{\nu} + k - \mu)}{4(\tilde{\nu} + \lambda + k - 1)(\tilde{\nu} + \lambda + k - 2)} \\ B_k = \alpha \gamma \frac{(2\tilde{\nu} + 2k + 2\lambda - 1)(\tilde{\nu} + k - \mu)}{2(\tilde{\nu} + \lambda + k - 1)} \\ C_k = (\tilde{\nu} + k)(\tilde{\nu} + k + 2\lambda) + \gamma^2 (\alpha^2 - 1) \times \frac{(\tilde{\nu} + k)(\tilde{\nu} + k + 2\lambda) + \mu^2 - 1 + (\mu + \lambda)(2\lambda - 1)}{2(\tilde{\nu} + k + \lambda - 1)(\tilde{\nu} + k + \lambda + 1)} \\ D_k = \alpha \gamma \frac{(2\tilde{\nu} + 2k + 2\lambda + 1)(\tilde{\nu} + k + \mu + 2\lambda)}{2(\tilde{\nu} + \lambda + k + 1)} \\ E_k = \gamma^2 (\alpha^2 - 1) \frac{(\tilde{\nu} + k + \mu + 2\lambda)(\tilde{\nu} + k + \mu + 2\lambda + 1)}{4(\tilde{\nu} + k + \lambda + 1)(\tilde{\nu} + k + \lambda + 2)} \end{array} \right.$$

4 types de développements sont possibles :

$$\left\{ \begin{array}{l} y(x) = ((x+1)(x-1))^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} (x-\alpha)^{\mu+\lambda-1} \times \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{\tilde{\nu},k}^{\lambda,\mu} J_{\tilde{\nu}+k}(\gamma(x-\alpha)) \\ y(x) = ((x+1)(x-1))^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} (x+\alpha)^{\mu+\lambda-1} \times \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{\tilde{\nu},k}^{\lambda,\mu} J_{\tilde{\nu}+k}(\gamma(x+\alpha)) \\ y(x) = ((x+1)(x-1))^{\frac{\mu}{2}} (x-\alpha)^{-\mu-\lambda} \times \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{\tilde{\nu},k}^{\lambda,-\mu-2\lambda+1} J_{\tilde{\nu}+k}(\gamma(x-\alpha)) \\ y(x) = ((x+1)(x-1))^{\frac{\mu}{2}} (x+\alpha)^{-\mu-\lambda} \times \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{\tilde{\nu},k}^{\lambda,-\mu-2\lambda+1} J_{\tilde{\nu}+k}(\gamma(x+\alpha)) \end{array} \right.$$

En ce qui concerne cette récurrence notons une propriété intéressante qui relie les coefficients, à savoir : $a_{\tilde{\nu},k}^{\lambda,-\mu-2\lambda+1} = \frac{a_{\tilde{\nu},k}^{\lambda,\mu}}{\Gamma(-\nu-k-\mu+1-2\lambda)\Gamma(\nu+k+1-\mu)}$. En effet prenons la récurrence de départ :

$A_k a_{\tilde{\nu},k-2}^{\lambda,\mu} + B_k a_{\tilde{\nu},k-1}^{\lambda,\mu} + (C_k - \omega) a_{\tilde{\nu},k}^{\lambda,\mu} + D_k a_{\tilde{\nu},k+1}^{\lambda,\mu} + E_k a_{\tilde{\nu},k+2}^{\lambda,\mu} = 0$ et étudions la récurrence obtenue par la substitution : $\mu \rightarrow -(\mu + 2\lambda - 1)$ en posant : $b_{\tilde{\nu},k}^{\lambda,\mu} = a_{\tilde{\nu},k}^{\lambda,-\mu-2\lambda+1} = f(k) a_{\tilde{\nu},k}^{\lambda,\mu}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{A}_k b_{\tilde{\nu},k-2}^{\lambda,\mu} + \tilde{B}_k b_{\tilde{\nu},k-1}^{\lambda,\mu} + (\tilde{C}_k - \omega) b_{\tilde{\nu},k}^{\lambda,\mu} + \tilde{D}_k b_{\tilde{\nu},k+1}^{\lambda,\mu} + \tilde{E}_k b_{\tilde{\nu},k+2}^{\lambda,\mu} = 0 \\ A_k a_{\tilde{\nu},k-2}^{\lambda,\mu} + B_k a_{\tilde{\nu},k-1}^{\lambda,\mu} + (C_k - \omega) a_{\tilde{\nu},k}^{\lambda,\mu} + D_k a_{\tilde{\nu},k+1}^{\lambda,\mu} + E_k a_{\tilde{\nu},k+2}^{\lambda,\mu} = 0 \end{array} \right. \quad \text{Posons } b_{\tilde{\nu},k}^{\lambda,\mu} = f(k) a_{\tilde{\nu},k}^{\lambda,\mu}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{A}_k = \gamma^2 (\alpha^2 - 1) \frac{(\tilde{\nu} + k + \mu + 2\lambda - 2)(\tilde{\nu} + k + \mu + 2\lambda - 1)}{4(\tilde{\nu} + \lambda + k - 1)(\tilde{\nu} + \lambda + k - 2)} = A_k \times \frac{(\tilde{\nu} + k + \mu + 2\lambda - 2)(\tilde{\nu} + k + \mu + 2\lambda - 1)}{(\tilde{\nu} + k - \mu - 1)(\tilde{\nu} + k - \mu)} = A_k \times \frac{f(k)}{f(k-2)} \\ \tilde{B}_k = \alpha \gamma \frac{(2\tilde{\nu} + 2k + 2\lambda - 1)(\tilde{\nu} + k + \mu + 2\lambda - 1)}{2(\tilde{\nu} + \lambda + k - 1)} = B_k \times \frac{\tilde{\nu} + k + 2\lambda - 1}{\tilde{\nu} + k - \mu} = B_k \times \frac{f(k)}{f(k-1)} \\ \tilde{C}_k = (\tilde{\nu} + k)(\tilde{\nu} + k + 2\lambda) + \gamma^2 (\alpha^2 - 1) \times \frac{(\tilde{\nu} + k)(\tilde{\nu} + k + 2\lambda) + \mu(\mu + 2\lambda - 1) - 1 + \lambda(2\lambda - 1)}{2(\tilde{\nu} + k + \lambda - 1)(\tilde{\nu} + k + \lambda + 1)} = C_k \\ \tilde{D}_k = \alpha \gamma \frac{(2\tilde{\nu} + 2k + 2\lambda + 1)(\tilde{\nu} + k - \mu + 1)}{2(\tilde{\nu} + \lambda + k + 1)} = D_k \times \frac{\tilde{\nu} + k - \mu + 1}{\tilde{\nu} + k + \mu + 2\lambda} = D_k \times \frac{f(k)}{f(k+1)} \\ \tilde{E}_k = \gamma^2 (\alpha^2 - 1) \frac{(\tilde{\nu} + k - \mu + 1)(\tilde{\nu} + k - \mu + 2)}{4(\tilde{\nu} + k + \lambda + 1)(\tilde{\nu} + k + \lambda + 2)} = E_k \times \frac{(\tilde{\nu} + k - \mu + 1)(\tilde{\nu} + k - \mu + 2)}{(\tilde{\nu} + k + \mu + 2\lambda)(\tilde{\nu} + k + \mu + 2\lambda + 1)} = E_k \times \frac{f(k)}{f(k+2)} \end{array} \right.$$

$$\frac{\Gamma(-\nu-k-\mu+1-2\lambda+2)\Gamma(\nu+k+1-\mu-2)}{\Gamma(-\nu-k-\mu+1-2\lambda)\Gamma(\nu+k+1-\mu)} = \frac{f(k)}{f(k-2)} = \frac{(\tilde{\nu} + k + \mu + 2\lambda - 2)(\tilde{\nu} + k + \mu + 2\lambda - 1)}{(\tilde{\nu} + k - \mu - 1)(\tilde{\nu} + k - \mu)}$$

Si nous posons $f(k) = (\Gamma(-\nu-k-\mu+1-2\lambda)\Gamma(\nu+k+1-\mu))^{-1}$ alors

$$\begin{aligned} \frac{f(k)}{f(k-1)} &= \frac{\tilde{\nu} + k + \mu + 2\lambda - 1}{\tilde{\nu} + k - \mu} \\ \frac{f(k)}{f(k+1)} &= \frac{\tilde{\nu} + k - \mu + 1}{\tilde{\nu} + k + \mu + 2\lambda} \\ \frac{f(k)}{f(k+2)} &= \frac{(\tilde{\nu} + k - \mu + 1)(\tilde{\nu} + k - \mu + 2)}{(\tilde{\nu} + k + \mu + 2\lambda)(\tilde{\nu} + k + \mu + 2\lambda + 1)} \end{aligned}$$

ce qui

confirme la relation : $a_{\tilde{\nu},k}^{\lambda,-\mu-2\lambda+1} = \frac{a_{\tilde{\nu},k}^{\lambda,\mu}}{\Gamma(-\nu-k-\mu+1-2\lambda)\Gamma(\nu+k+1-\mu)}$.

Cette récurrence devient une récurrence à trois termes pour les valeurs suivantes de $\alpha=0,1$ et -1 , trois valeurs pour lesquels j'ai déjà donné les développements précédemment.

Une autre développement consiste à proposer un produit de fonction de Gegenbauer associée (ici une fonction Gegenbauer « On The Cut ») et de fonction de Bessel:

$x \in [1, +\infty]$ $y(x) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_{\tilde{\nu},k}^{\mu} C_{\tilde{\nu}+k}^{\lambda,\mu} \left(\frac{1}{x} \right) \times x^{-\lambda} J_{\tilde{\nu}+k}(\gamma x)$. Je désignerais la fonction $x^{-\lambda} J_{\tilde{\nu}}(x)$ comme une fonction de Bessel hyper-sphérique noté ainsi : $j_{\lambda,\tilde{\nu}}(x) = x^{-\lambda} J_{\tilde{\nu}}(x)$. En injectant le développement précédent dans l'équation différentielle des ondes hyper-sphéroïdales et en tirant partie des relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{\tilde{\nu}+k}^{\lambda,\mu} \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{(2\lambda+1)x C_{\tilde{\nu}+k}^{\mu} \left(\frac{1}{x} \right) - x^2 \left((k+\tilde{\nu})(k+\tilde{\nu}+2\lambda) - \frac{\mu(\mu+2\lambda-1)x^2}{x^2-1} \right) C_{\tilde{\nu}+k}^{\lambda,\mu} \left(\frac{1}{x} \right)}{x^2-1} \\ j_{\lambda,k+\tilde{\nu}}(\gamma x) = \frac{-(2\lambda+1)\gamma x j_{\lambda,k+\tilde{\nu}}'(\gamma x) + ((k+\tilde{\nu})(k+\tilde{\nu}+2\lambda) - (\gamma x)^2) j_{\lambda,k+\tilde{\nu}}(\gamma x)}{(\gamma x)^2} \\ \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) C_{\tilde{\nu}+k}^{\lambda,\mu} \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{1}{2(k+\tilde{\nu}+\lambda)} \left((k+\tilde{\nu}+2\lambda)(k+\tilde{\nu}+\mu+2\lambda-1) C_{k+\tilde{\nu}-1}^{\lambda,\mu} \left(\frac{1}{x} \right) - (k+\tilde{\nu})(k+\tilde{\nu}+1-\mu) C_{\tilde{\nu}+k+1}^{\lambda,\mu} \left(\frac{1}{x} \right) \right) \\ j_{\lambda,k+\tilde{\nu}}'(\gamma x) = \frac{(k+\tilde{\nu}) j_{\lambda,k+\tilde{\nu}-1}(\gamma x) - (k+\tilde{\nu}+2\lambda) j_{\lambda,k+\tilde{\nu}+1}(\gamma x)}{2(k+\tilde{\nu}+\lambda)} \\ \frac{1}{x} C_{\tilde{\nu}+k}^{\lambda,\mu} \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{(k+\tilde{\nu}+\mu+2\lambda-1) C_{\tilde{\nu}+k-1}^{\lambda,\mu} \left(\frac{1}{x} \right) + (k+\tilde{\nu}+1-\mu) C_{k+\tilde{\nu}+1}^{\lambda,\mu} \left(\frac{1}{x} \right)}{2(k+\tilde{\nu}+\lambda)} \\ \frac{j_{\lambda,k+\tilde{\nu}}(\gamma x)}{\gamma x} = \frac{j_{\lambda,k+\tilde{\nu}-1}(\gamma x) + j_{\lambda,k+\tilde{\nu}+1}(\gamma x)}{2(k+\tilde{\nu}+\lambda)} \end{array} \right.$$

On parvient à la récurrence à trois termes suivantes, que l'on a déjà rencontré auparavant :

$$\left\{ \begin{array}{l} y(x) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_{\tilde{\nu},k}^{\mu} C_{\tilde{\nu}+k}^{\lambda,\mu} \left(\frac{1}{x} \right) \times x^{-\lambda} J_{\tilde{\nu}+k}(\gamma x) \\ -\gamma \frac{(2\tilde{\nu}+2k+2\lambda-1)(\tilde{\nu}+k-\mu)}{2(\tilde{\nu}+k+\lambda-1)} a_{\tilde{\nu},k-1}^{\mu} + ((\tilde{\nu}+k)(\tilde{\nu}+k+2\lambda)-\lambda) a_{\tilde{\nu},k}^{\mu} - \gamma \frac{(\tilde{\nu}+k+\mu+2\lambda)(2\tilde{\nu}+2k+2\lambda+1)}{2(\tilde{\nu}+k+\lambda+1)} a_{\tilde{\nu},k+1}^{\mu} = 0 \end{array} \right.$$

En ce qui concerne un développement possible d'une solution angulaire en fonctions associées de Legendre : $x \in [-1,1]$ $y(x) = e^{i\alpha\gamma x} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} i^k a_{\tilde{\nu},k}^{\lambda,\mu} C_{\tilde{\nu}+k}^{\lambda,\mu}(x) = e^{i\alpha\gamma x} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} e^{\frac{ik\pi}{2}} a_{\tilde{\nu},k}^{\lambda,\mu} C_{\tilde{\nu}+k}^{\lambda,\mu}(x)$. En injectant cette forme dans l'équation différentielle des ondes sphéroïdales, on obtient comme équation intermédiaire :

$$x \rightarrow t \quad (1-t^2)y''(t) - (2\lambda+1)t y'(t) + \left(\omega + \gamma^2(1-t^2) - \frac{\mu(\mu+2\lambda-1)}{1-t^2} \right) y(t) = 0$$

$$y(t) = e^{i\alpha\gamma t} w(t) \Rightarrow (1-t^2)w''(t) - ((2\lambda+1)t + 2i\alpha\gamma(t^2-1))w'(t) + \left(\omega - (2\lambda+1)t i\alpha\gamma + \gamma^2(\alpha^2-1)(t^2-1) - \frac{\mu(\mu+2\lambda-1)}{1-t^2} \right) w(t) = 0$$

Toujours en utilisant les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{\tilde{\nu}+k}^{\lambda,\mu}''(t) = \frac{(2\lambda+1)t C_{\tilde{\nu}+k}^{\lambda,\mu}'(t) - \left((k+\tilde{\nu})(k+\tilde{\nu}+2\lambda) - \frac{\mu(\mu+2\lambda-1)}{1-t^2} \right) C_{\tilde{\nu}+k}^{\lambda,\mu}(t)}{1-t^2} \\ (1-t^2) C_{\tilde{\nu}+k}^{\lambda,\mu}'(t) = \frac{(k+\tilde{\nu}+2\lambda)(k+\tilde{\nu}+\mu+2\lambda-1) C_{\tilde{\nu}+k-1}^{\lambda,\mu}(t) - (k+\tilde{\nu})(k+\tilde{\nu}+1-\mu) C_{\tilde{\nu}+k+1}^{\lambda,\mu}(t)}{2(k+\tilde{\nu}+\lambda)} \\ t C_{\tilde{\nu}+k}^{\lambda,\mu}(t) = \frac{(k+\tilde{\nu}+\mu+2\lambda-1) C_{\tilde{\nu}+k-1}^{\lambda,\mu}(t) + (k+\tilde{\nu}+1-\mu) C_{\tilde{\nu}+k+1}^{\lambda,\mu}(t)}{2(k+\tilde{\nu}+\lambda)} \\ t^2 C_{\tilde{\nu}+k}^{\lambda,\mu}(t) = \frac{(k+\tilde{\nu}+\mu+2\lambda-2)(k+\tilde{\nu}+\mu+2\lambda-1)}{4(k+\tilde{\nu}+\lambda)(k+\tilde{\nu}+\lambda-1)} \times C_{\tilde{\nu}+k-2}^{\lambda,\mu}(t) + \\ + \frac{2(k+\tilde{\nu})(k+\tilde{\nu}+2\lambda) + (2\mu-1)(2\lambda-1) - 1 - 2\mu^2}{4(k+\tilde{\nu}+\lambda-1)(k+\tilde{\nu}+\lambda+1)} \times C_{\tilde{\nu}+k}^{\lambda,\mu}(t) + \\ + \frac{(k+\tilde{\nu}-\mu+1)(k+\tilde{\nu}-\mu+2)}{4(k+\tilde{\nu}+\lambda)(k+\tilde{\nu}+\lambda+1)} \times C_{\tilde{\nu}+k+2}^{\lambda,\mu}(t) \end{array} \right.$$

et l'on obtient pour ce développement là encore la récurrence à 5 termes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in [-1,1] \quad y(x) = e^{i\alpha\gamma x} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} i^k a_{\tilde{\nu},k}^{\lambda,\mu} C_{\tilde{\nu}+k}^{\lambda,\mu}(x) \\ A_k a_{\tilde{\nu},k-2}^{\lambda,\mu} + B_k a_{\tilde{\nu},k-1}^{\lambda,\mu} + (C_k - \lambda) a_{\tilde{\nu},k}^{\lambda,\mu} + D_k a_{\tilde{\nu},k+1}^{\lambda,\mu} + E_k a_{\tilde{\nu},k+2}^{\lambda,\mu} = 0 \\ A_k = \gamma^2(\alpha^2-1) \frac{(\tilde{\nu}+k-\mu-1)(\tilde{\nu}+k-\mu)}{4(\tilde{\nu}+\lambda+k-1)(\tilde{\nu}+\lambda+k-2)} \\ B_k = \alpha\gamma \frac{(2\tilde{\nu}+2k+2\lambda-1)(\tilde{\nu}+k-\mu)}{2(\tilde{\nu}+\lambda+k-1)} \\ C_k = (\tilde{\nu}+k)(\tilde{\nu}+k+2\lambda) + \gamma^2(\alpha^2-1) \times \frac{(\tilde{\nu}+k)(\tilde{\nu}+k+2\lambda) + \mu^2 - 1 + (\mu+\lambda)(2\lambda-1)}{2(\tilde{\nu}+k+\lambda-1)(\tilde{\nu}+k+\lambda+1)} \\ D_k = \alpha\gamma \frac{(2\tilde{\nu}+2k+2\lambda+1)(\tilde{\nu}+k+\mu+2\lambda)}{2(\tilde{\nu}+\lambda+k+1)} \\ E_k = \gamma^2(\alpha^2-1) \frac{(\tilde{\nu}+k+\mu+2\lambda)(\tilde{\nu}+k+\mu+2\lambda+1)}{4(\tilde{\nu}+k+\lambda+1)(\tilde{\nu}+k+\lambda+2)} \\ C_k = (\tilde{\nu}+k)(\tilde{\nu}+k+1) + 2\gamma^2(\alpha^2-1) \frac{(\tilde{\nu}+k)(\tilde{\nu}+k+1) + \mu^2 - 1}{(2\tilde{\nu}+2k-1)(2\tilde{\nu}+2k+3)} \end{array} \right.$$

On obtient le même résultat avec le développement : $x \in [-1,1]$ $y(x) = e^{-i\alpha\gamma x} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} i^{-k} a_{\tilde{\nu},k}^{\lambda,\mu} C_{\tilde{\nu}+k}^{\lambda,\mu}(x)$.

Toutes ces formules sont clairement à relier aux formules que l'on trouve originellement dans le cas des **seuls fonctions sphéroïdales** chez J.Meixner et F.W.Schafke (récurrence (6) section 3.82 page 307, formule (8), récurrence (11) section 3.82 page 308, formules (15) et (16), section 3.82 page 309, Sphaeroid funktionen, en allemand) ainsi que dans une article plus récent de 2002 de A.L.VAN BUREN et J.E.BOISVERT, « ACCURATE CALCULATION OF PROLATE SPHEROIDAL RADIAL FUNCTIONS OF THE FIRST KIND AND THEIR FIRST DERIVATIVES » (formule 9 et 10 pages 594 et 595), indépendamment du contexte strictement restreint à la normalisation des fonctions sphéroïdales radiales ou angulaires.

Une formule générale de J.Meixner et F.W.Schafke pour le produit des fonctions sphéroïdales radiales et angulaire que l'on étend aux produits des mêmes fonctions hyper-sphéroïdales

Ce chapitre est en référence à la formule (4) section 3.81 page 307 dans l'ouvrage de J.Meixner et F.W.Schafke « Sphaeroid funktionen ». Cette formule établit que le produit de la fonction sphéroïdale radiale et angulaire peut s'écrire sous la forme d'un développement de fonctions de Bessel sphériques et de fonctions de Legendre associées dont l'argument est relié à une système de coordonnées sphériques décentrées sur l'axe z (et à une constante multiplicative près suivant la normalisation choisie) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi > 1 \\ \eta \in [-1,1] \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} S_v^{(1),\mu}(\xi, \gamma^2) P_{S_v}^{\mu}(\eta, \gamma^2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,k}^{\mu}(\gamma, \alpha) P_{v+k}^{\mu}(\eta_0) j_{v+k}(k r) \\ \gamma = k c \rightarrow k r = \gamma \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2) + (\xi \eta - \alpha)^2} \\ k r = \gamma r_0 = k c r_0 \rightarrow r = c r_0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} r_0 = \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2) + (\xi \eta - \alpha)^2} \\ r = c \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2) + (\xi \eta - \alpha)^2} \\ \eta_0 = \frac{\xi \eta - \alpha}{\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2) + (\xi \eta - \alpha)^2}} \end{array} \right.$$

$$A_k b_{v,k-2}^{\mu} + B_k b_{v,k-1}^{\mu} + (C_k - \lambda) b_{v,k}^{\mu} + D_k b_{v,k+1}^{\mu} + E_k b_{v,k+2}^{\mu} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_k = \gamma^2 (\alpha^2 - 1) \frac{(v - \mu + k - 1)(v - \mu + k)}{(2v + 2k - 3)(2v + 2k - 1)} \\ B_k = 2 \alpha \gamma \frac{(v + k)(v - \mu + k)}{2v + 2k - 1} \\ C_k = (v + k)(v + k + 1) + 2\gamma^2 (\alpha^2 - 1) \frac{(v + k)(v + k + 1) + \mu^2 - 1}{(2v + 2k - 1)(2v + 2k + 3)} \\ D_k = 2 \alpha \gamma \frac{(v + k + 1)(v + \mu + k + 1)}{2v + 2k + 3} \\ E_k = \gamma^2 (\alpha^2 - 1) \frac{(v + \mu + k + 1)(v + \mu + k + 2)}{(2v + 2k + 3)(2v + 2k + 5)} \end{array} \right.$$

La formule (4) concerne le produit de tous les types de fonctions sphéroïdales radiales construites avec les 4 espèces de fonctions de Bessel sphériques :

$$S_v^{(j),\mu}(\xi, \gamma^2) P_{S_v}^{\mu}(\eta, \gamma^2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,k}^{\mu}(\gamma, \alpha) P_{v+k}^{\mu}(\eta_0) \psi_{v+k}^{(j)}(k r)$$

$$\psi_{v+k}^{(j)} = j_{v+k}, y_{v+k}, h_{v+k}^{(1)}, h_{v+k}^{(2)} \quad j = 1, 2, 3, 4$$

Par ailleurs la fonction sphéroïdale angulaire est celle définie à partir des fonctions de Legendre associées, telles qu'elles sont définies par « NIST Handbook of Mathematical Functions », « Legendre and related functions » et également par l'ouvrage de W.Magnus, F.Oberhettinger, R.P.Soni « Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics ». Dans la formule de J.Meixner et F.W.Schafke c'est d'ailleurs le symbole gothique qui est utilisée pour cette fonction tout comme chez Magnus/Oberhettinger. La définition en terme de fonctions hypergéométrique est exactement la même que celle donnée par NIST.

Je me permet de « manipuler » cette formule pour la transcrire sans démonstration au cas des fonctions hyper-sphéroïdales de première espèce (angulaires et radiales) :

$$\begin{cases} \xi > 1 \\ \eta \in [-1,1] \end{cases} \quad \begin{cases} HS_v^{(1),\mu}(\xi, \gamma^2) HPS_v^\mu(\eta, \gamma^2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,k}^{\lambda,\mu}(\gamma, \alpha) C_{v+k}^{\lambda,\mu}(\eta_0) \frac{J_{v+k}(\gamma r_0)}{(\gamma r_0)^\lambda} \\ \eta_0 = \frac{\xi \eta - \alpha}{\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2) + (\xi \eta - \alpha)^2}} \quad r_0 = \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2) + (\xi \eta - \alpha)^2} \end{cases}$$

$$A_k b_{v,k-2}^\mu + B_k b_{v,k-1}^\mu + (C_k - \lambda) b_{v,k}^\mu + D_k b_{v,k+1}^\mu + E_k b_{v,k+2}^\mu = 0$$

Puis j'introduis plutôt les fonctions de Gegenbauer associées « On The cut » qui définies sur $[-1,1]$:

$$C_{v+k}^{\lambda,\mu}(x) = e^{i \frac{1}{2} \pi \mu} C_{v+k}^{\lambda,\mu}(x + i0) = e^{-i \frac{1}{2} \pi \mu} C_{v+k}^{\lambda,\mu}(x - i0)$$

Ce qui permet de substituer aux fonctions hyper-sphéroïdales Hps les fonctions hyper-sphéroïdales hps sont définies également par une formule similaire :

$$hps_v^{\lambda,\mu}(\eta, \gamma^2) = e^{i \frac{1}{2} \pi \mu} HPS_v^{\lambda,\mu}(\eta + i0, \gamma^2) = e^{-i \frac{1}{2} \pi \mu} HPS_v^{\lambda,\mu}(\eta - i0, \gamma^2)$$

Cela conduit à la formule suivante :

$$HS_v^{(j),\lambda,\mu}(\xi, \gamma^2) hps_v^{\lambda,\mu}(\eta, \gamma^2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,k}^{\lambda,\mu}(\gamma, \alpha) C_{v+k}^{\lambda,\mu}(\eta_0) \frac{J_{v+k}(\gamma r_0)}{(\gamma r_0)^\lambda}$$

Comme je le dis, plutôt que de démontrer formellement cette formule, je l'exprimerai plutôt sous la forme d'une possibilité de construire le produit séparé d'une solution radiale et angulaire de l'équation des ondes hyper-sphéroïdales (par exemple toutes deux de première espèce) sous la forme d'un développement en produit de fonctions de Bessel et de Gegenbauer associées (sur la coupure) :

$$\begin{cases} \xi > 1 \\ \eta \in [-1,1] \end{cases} \quad y(\xi, \eta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,k}^{\lambda,\mu}(\gamma, \alpha) \times C_{v+k}^{\lambda,\mu} \left(\frac{\xi \eta - \alpha}{\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2) + (\xi \eta - \alpha)^2}} \right) \times \frac{J_{v+k} \left(\gamma \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2) + (\xi \eta - \alpha)^2} \right)}{\left(\gamma \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2) + (\xi \eta - \alpha)^2} \right)^\lambda}$$

$$A_k b_{v,k-2}^{\lambda,\mu} + B_k b_{v,k-1}^{\lambda,\mu} + (C_k - \lambda) b_{v,k}^{\lambda,\mu} + D_k b_{v,k+1}^{\lambda,\mu} + E_k b_{v,k+2}^{\lambda,\mu} = 0$$

$$\begin{cases} A_k = \gamma^2 (\alpha^2 - 1) \frac{(v+k-\mu-1)(v+k-\mu)}{4(v+\lambda+k-1)(v+\lambda+k-2)} \\ B_k = \alpha \gamma \frac{(2v+2k+2\lambda-1)(v+k-\mu)}{2(v+\lambda+k-1)} \\ C_k = (v+k)(v+k+2\lambda) + \gamma^2 (\alpha^2 - 1) \times \frac{(v+k)(v+k+2\lambda) + \mu^2 - 1 + (\mu+\lambda)(2\lambda-1)}{2(v+k+\lambda-1)(v+k+\lambda+1)} \\ D_k = \alpha \gamma \frac{(2v+2k+2\lambda+1)(v+k+\mu+2\lambda)}{2(v+\lambda+k+1)} \\ E_k = \gamma^2 (\alpha^2 - 1) \frac{(v+k+\mu+2\lambda)(v+k+\mu+2\lambda+1)}{4(v+k+\lambda+1)(v+k+\lambda+2)} \end{cases}$$

Nous allons maintenant reproduire toutes les récurrences particulières définies ci-avant à partir de la formule qui vient d'être énoncée.

Par dérivation sur η de la formule précédente, il vient :

$$\text{Sachant que } \eta_0 = \frac{\xi \eta - \alpha}{\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2) + (\xi \eta - \alpha)^2}} \quad \text{et} \quad r_0 = \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2) + (\xi \eta - \alpha)^2} \quad \text{et} \quad j_{\lambda, \nu+k}(\gamma r_0) = \frac{J_{\nu+k}(\gamma r_0)}{(\gamma r_0)^\lambda}$$

$$\text{Dérivation sur } \eta \Rightarrow HS_v^{(1), \lambda, \mu}(\xi, \gamma^2) hps_v^{\lambda, \mu}(\eta, \gamma^2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{\nu, k}^{\lambda, \mu} \left\{ \frac{d C_{\nu+k}^{\lambda, \mu}(\eta_0)}{d\eta} + C_{\nu+k}^{\lambda, \mu}(\eta_0) \frac{d j_{\lambda, \nu+k}(\gamma r_0)}{d\eta} \right\}$$

$$\text{Comme } \begin{cases} \frac{d C_{\nu+k}^{\lambda, \mu}(\eta_0)}{d\eta} = \eta_0'(\eta) C_{\nu+k}^{\lambda, \mu}(\eta_0) & \frac{d j_{\lambda, \nu+k}(\gamma r_0)}{d\eta} = \gamma r_0'(\eta) j_{\lambda, \nu+k}'(\gamma r_0) \\ \eta_0'(\eta) = \frac{(\xi - \alpha \eta)(\xi^2 - 1)}{((\xi^2 - 1)(1 - \eta^2) + (\xi \eta - \alpha)^2)^{\frac{3}{2}}} & r_0'(\eta) = \frac{\eta - \alpha \xi}{\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2) + (\xi \eta - \alpha)^2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow HS_v^{(1), \lambda, \mu}(\xi, \gamma^2) hps_v^{\lambda, \mu}(\eta, \gamma^2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{\nu, k}^{\lambda, \mu} \left\{ \frac{(\xi - \alpha \eta)(\xi^2 - 1)}{((\xi^2 - 1)(1 - \eta^2) + (\xi \eta - \alpha)^2)^{\frac{3}{2}}} C_{\nu+k}^{\lambda, \mu}(\eta_0) j_{\lambda, \nu+k}(\gamma r_0) + \right. \\ \left. + \gamma \frac{\eta - \alpha \xi}{\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2) + (\xi \eta - \alpha)^2}} C_{\nu+k}^{\lambda, \mu}(\eta_0) j_{\lambda, \nu+k}'(\gamma r_0) \right\}$$

Les arguments r_0 et η_0 sont définis en établissant des formules de changements de variables entre les deux systèmes de coordonnées, l'un de coordonnées hyper-sphéroïdales allongées et l'autre de coordonnées hyper-sphériques décentrées sur l'axe de symétrie de rotation z définies comme suit :

$$\begin{cases} x_1 + i x_2 = r \sin(\theta) e^{i\varphi} = r \sqrt{1 - \eta_0^2} e^{i\varphi} = c \sqrt{\xi^2 - 1} \sqrt{1 - \eta^2} e^{i\varphi} \\ x_3 = r \cos(\theta) = r \eta_0 + c \alpha = c (r_0 \eta_0 + \alpha) = c \xi \eta \end{cases}$$

$$\xi > 1 \quad \text{et} \quad \eta \in [-1, +1] \Rightarrow \begin{cases} \left| \xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right| \left| \eta + i \sqrt{1 - \eta^2} \right| = \left| \xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right| > 1 \\ \left| \xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right| \left| \eta - i \sqrt{1 - \eta^2} \right| = \left| \xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right| > 1 \end{cases}$$

$$\text{Soit } \eta \in [-1, +1] \quad |r_0| \times \left| \eta \pm i \sqrt{1 - \eta^2} \right| = |r_0| > |\alpha \pm 1|$$

Les formules de correspondance du système hyper-sphéroïdale allongé vers ce système hyper-sphérique sont les suivantes :

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= r^2 (1 - \eta_0^2) = c^2 (\xi^2 - 1)(1 - \eta^2) = c^2 (\xi^2 + \eta^2 - 1 - \xi^2 \eta^2) \quad \text{et} \quad r_0^2 \eta_0^2 = \xi^2 \eta^2 + \alpha^2 - 2\alpha \xi \eta \\ \Rightarrow \begin{cases} r_0^2 = \xi^2 + \eta^2 - 1 - \xi^2 \eta^2 + r_0^2 \eta_0^2 = \xi^2 + \eta^2 + \alpha^2 - 1 - 2\alpha \xi \eta \Rightarrow r_0 = \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2) + (\xi \eta - \alpha)^2} \\ \eta_0^2 = \frac{\xi^2 \eta^2 + \alpha^2 - 2\alpha \xi \eta}{\xi^2 + \eta^2 + \alpha^2 - 1 - 2\alpha \xi \eta} \Rightarrow \eta_0 = \frac{\xi \eta - \alpha}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \alpha^2 - 1 - 2\alpha \xi \eta}} = \frac{\xi \eta - \alpha}{\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2) + (\xi \eta - \alpha)^2}} \end{cases} \end{aligned}$$

Les formules de correspondance de ce système hyper-sphérique vers le système hyper-sphéroïdale allongé :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \xi \eta = r_0 \eta_0 + \alpha \Rightarrow \eta = \frac{1}{\xi} (r_0 \eta_0 + \alpha) \\ \xi^2 + \eta^2 = r_0^2 - r_0^2 \eta_0^2 + 1 + (r_0 \eta_0 + \alpha)^2 \end{cases} \Rightarrow \xi^2 + \frac{1}{\xi^2} (r_0 \eta_0 + \alpha)^2 - r_0^2 (1 - \eta_0^2) - 1 - (r_0 \eta_0 + \alpha)^2 = 0 \\ & \Rightarrow \xi^2 = \frac{r_0^2 + (1 + \alpha^2) + 2 \alpha r_0 \eta_0 \pm \sqrt{(r_0^2 + 1 + \alpha^2 + 2 \alpha r_0 \eta_0)^2 - 4(r_0 \eta_0 + \alpha)^2}}{2} \\ & \text{Or } \xi > 1 \Rightarrow \begin{cases} \xi^2 = \frac{r_0^2 + 1 + \alpha^2 + 2 \alpha r_0 \eta_0 + \sqrt{(r_0^2 + 1 + \alpha^2 + 2 \alpha r_0 \eta_0)^2 - 4(r_0 \eta_0 + \alpha)^2}}{2} \\ \eta = \frac{r_0 \eta_0 + \alpha}{\xi} \end{cases} \\ & \Rightarrow \xi^2 = \frac{(r_0 \eta_0 + \alpha)^2 + 1 + r_0^2 (1 - \eta_0^2) + \sqrt{((r_0 \eta_0 + \alpha + 1)^2 + r_0^2 (1 - \eta_0^2))((r_0 \eta_0 + \alpha - 1)^2 + r_0^2 (1 - \eta_0^2))}}{2} \end{aligned}$$

La valeur $\alpha=0$ constitue un cas particulier des formules de correspondance lorsque les deux systèmes de coordonnées ont une origine commune. En l'occurrence : $\begin{cases} r_0 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - 1} \\ \eta_0 = \frac{\xi \eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - 1}} \end{cases}$.

Supposons $\alpha=0$ et $\eta=0$ alors $\alpha=0$ et $\eta=0 \Rightarrow \eta_0=0$ et $r_0 = \sqrt{\xi^2 - 1}$. Supposons $\alpha=0$ et $\eta=1$ alors $\alpha=0$ $\eta=1 \Rightarrow \begin{cases} r_0 = \xi \\ \eta_0 = \frac{\xi}{\xi} = 1 \end{cases}$. Les formules de correspondance lorsque les deux systèmes de

coordonnées sont décalés soit $\alpha=1$, sont les suivantes : $\begin{cases} r_0 = \xi - \eta \\ \eta_0 = \frac{\xi \eta - 1}{\xi - \eta} \end{cases}$. Les formules de correspondance lorsque les deux systèmes de coordonnées sont décalés soit $\alpha=-1$ $\begin{cases} r_0 = \xi + \eta \\ \eta_0 = \frac{\xi \eta + 1}{\xi - \eta} \end{cases}$.

Si nous appliquons la formule modifiée de Meixner & Schafke pour η proche de 1, avec l'expression de la fonction de Gegenbauer associée suivante : $C_v^{\lambda, \mu}(\eta_0) = (-1)^{\lambda - \frac{1}{2}} \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} (1 - \eta_0^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{\lambda + v - \frac{1}{2}}^{\lambda - \frac{1}{2}, \mu}(\eta_0)$, alors nous avons les développements suivants :

$$\begin{cases} r_0 = \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2) + (\xi \eta - \alpha)^2} \approx (\xi - \alpha) + (1 - \eta) \frac{\xi \alpha - 1}{\xi - \alpha} - (1 - \eta)^2 \frac{(\xi^2 - 1)(\alpha^2 - 1)}{2(\xi - \alpha)^3} + O((1 - \eta)^3) \approx (\xi - \alpha) + (1 - \eta) \frac{\xi \alpha - 1}{\xi - \alpha} + O((1 - \eta)^2) \\ \eta_0 = \frac{\xi \eta - \alpha}{\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2) + (\xi \eta - \alpha)^2}} \approx 1 - (1 - \eta) \frac{\xi^2 - 1}{(\xi - \alpha)^2} + (1 - \eta)^2 \frac{(\xi^2 - 1)(\alpha^2 + 2 \alpha \xi - 3)}{2(\xi - \alpha)^4} + O((1 - \eta)^3) \Rightarrow 1 - \eta_0 \approx (1 - \eta) \frac{\xi^2 - 1}{(\xi - \alpha)^2} + O((1 - \eta)^2) \\ P_{\lambda + v - \frac{1}{2}}^{\lambda - \frac{1}{2}, \mu}(\eta_0) \approx (1 - \eta_0)^{-\frac{2\lambda - 1 + 2\mu}{4}} \left\{ \frac{2^{\frac{2\lambda - 1 + 2\mu}{4}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - \lambda - \mu\right)} + O((1 - \eta_0)) \right\} \\ C_v^{\lambda, \mu}(\eta_0) \approx (-1)^{\lambda - \frac{1}{2}} \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} (1 - \eta_0^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} (1 - \eta_0)^{-\frac{2\lambda - 1 + 2\mu}{4}} \left\{ \frac{2^{\frac{2\lambda - 1 + 2\mu}{4}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - \lambda - \mu\right)} + O((1 - \eta_0)) \right\} \propto (1 - \eta_0)^{-\frac{2\lambda - 1 + \mu}{2}} (1 + O((1 - \eta_0))) \end{cases}$$

Par passage à la limite autour de la valeur $\eta=1$ sur la formule modifiée de Meixner et Schafke, il vient :

$$\text{Calculons } \lim_{\eta \rightarrow 1} (1-\eta)^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} HS_v^{(1),\mu}(\xi, \gamma^2) hps_v^\mu(\eta, \gamma^2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,k}^{\lambda,\mu} \lim_{\eta \rightarrow 1} (1-\eta)^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} C_{v+k}^{\lambda,\mu}(\eta_0) j_{\lambda,v+k}(\gamma r_0)$$

$$\text{Comme } C_v^{\lambda,\mu}(\eta_0) \propto (1-\eta_0^2)^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} \propto (1-\eta)^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} (\xi-\alpha)^{\mu+2\lambda-1} (\xi^2-1)^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{\eta \rightarrow 1} (1-\eta)^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} C_{v+k}^{\lambda,\mu}(\eta_0) \propto (\xi-\alpha)^{\mu+2\lambda-1} (\xi^2-1)^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}}$$

$$\text{Comme } \lim_{\eta \rightarrow 1} (1-\eta)^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} hps_v^\mu(\eta) \propto 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\eta \rightarrow 1} r_0(\xi, \eta) = \xi - \alpha \Rightarrow HS_v^{(1),\mu}(\xi, \gamma^2) \propto (\xi-\alpha)^{\mu+2\lambda-1} (\xi^2-1)^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,k}^{\lambda,\mu} j_{\lambda,v+k}(\gamma(\xi-\alpha))$$

$$j_{\lambda,v+k}(\gamma(\xi-\alpha)) = \gamma^{-\lambda} (\xi-\alpha)^{-\lambda} J_{\lambda,v+k}(\gamma(\xi-\alpha)) \Rightarrow HS_v^{(1),\mu}(\xi, \gamma^2) \propto (\xi-\alpha)^{\mu+\lambda-1} (\xi^2-1)^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,k}^{\lambda,\mu} J_{v+k}(\gamma(\xi-\alpha))$$

Lorsque η proche de -1 :

$$\left\{ \begin{aligned} r_0 &= \sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2) + (\xi\eta-\alpha)^2} \approx (\xi+\alpha) - (1+\eta) \frac{\xi}{\xi+\alpha} + O((1+\eta)^2) \\ \eta_0 &= \frac{\xi\eta-\alpha}{\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2) + (\xi\eta-\alpha)^2}} \approx -1 + (1+\eta) \frac{\xi^2-1}{(\xi+\alpha)^2} + O((1+\eta)^2) \Rightarrow 1+\eta_0 = (1+\eta) \frac{\xi^2-1}{(\xi+\alpha)^2} + O((1+\eta)^2) \\ P_v^\mu(\eta_0) &\approx -\frac{2^{\frac{\mu}{2}} \pi}{\Gamma(1+\mu) \sin(\pi\mu)} \frac{(1+\eta_0)^{\frac{\mu}{2}}}{\Gamma(-v-\mu)\Gamma(1+v-\mu)} \approx 2^{-\frac{\mu}{2}} \Gamma(-\mu) \frac{(1+\eta_0)^{\frac{\mu}{2}}}{\Gamma(-v-\mu)\Gamma(1+v-\mu)} \{1 + O((1-\eta_0))\} \\ \Rightarrow P_{\lambda+v-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(\eta_0) &\approx 2^{-\frac{2\mu+2\lambda-1}{4}} \Gamma(-\mu) \frac{(1+\eta_0)^{\frac{2\mu+2\lambda-1}{4}}}{\Gamma(-v-\mu+1-2\lambda)\Gamma(1+v-\mu)} (1 + O((1-\eta_0))) \\ C_v^{\lambda,\mu}(\eta_0) &\propto \frac{(1-\eta_0^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} (1+\eta_0)^{\frac{2\mu+2\lambda-1}{4}}}{\Gamma(-v-\mu+1-2\lambda)\Gamma(1+v-\mu)} (1 + O((1-\eta_0))) \propto \frac{(1+\eta_0)^{\frac{\mu}{2}}}{\Gamma(-v-\mu+1-2\lambda)\Gamma(1+v-\mu)} (1 + O((1-\eta_0))) \end{aligned} \right.$$

$$\text{Calculons } \lim_{\eta \rightarrow -1} (1+\eta)^{\frac{\mu}{2}} HS_v^{(1),\lambda,\mu}(\xi, \gamma^2) hps_v^\mu(\eta, \gamma^2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,k}^{\lambda,\mu} \lim_{\eta \rightarrow -1} (1+\eta)^{\frac{\mu}{2}} C_{v+k}^{\lambda,\mu}(\eta_0) j_{v+k}(\tilde{r})$$

$$\text{Comme } C_v^{\lambda,\mu}(\eta_0) \propto \frac{(1+\eta_0)^{\frac{\mu}{2}}}{\Gamma(-v-\mu+1-2\lambda)\Gamma(1+v-\mu)} \propto \frac{(1+\eta)^{\frac{\mu}{2}} (\xi^2-1)^{\frac{\mu}{2}} (\xi+\alpha)^{-\mu}}{\Gamma(-v-\mu+1-2\lambda)\Gamma(1+v-\mu)} \Rightarrow \lim_{\eta \rightarrow -1} (1+\eta)^{\frac{\mu}{2}} C_{v+k}^{\lambda,\mu}(\eta_0) \propto \frac{(\xi^2-1)^{\frac{\mu}{2}} (\xi+\alpha)^{-\mu}}{\Gamma(-v-\mu+\frac{1}{2}-\lambda)\Gamma(v-\mu+\frac{3}{2}-\lambda)}$$

$$\text{Comme } \lim_{\eta \rightarrow -1} (1+\eta)^{\frac{\mu}{2}} hps_v^\mu(\eta) \propto 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\eta \rightarrow -1} r_0(\xi, \eta) = \xi + \alpha \Rightarrow HS_v^{(1),\lambda,\mu}(\xi, \gamma^2) \propto (\xi+\alpha)^{-\mu} (\xi^2-1)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{b_{v,k}^{\lambda,\mu}}{\Gamma(-v-k-\mu+1-2\lambda)\Gamma(v+k+1-\mu)} j_{\lambda,v+k}(\gamma(\xi+\alpha))$$

Si bien que deux développements de la solution radiale de première espèce sont possibles à partir des passages à la limite η vers 1 ou -1. Ils sont de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} y(\xi) = (\xi - \alpha)^{\mu+\lambda-1} (\xi^2 - 1)^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,k}^{\lambda,\mu} J_{v+k}(\gamma(\xi - \alpha)) \\ y(\xi) = (\xi + \alpha)^{-\mu-\lambda} (\xi^2 - 1)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{b_{v,k}^{\lambda,\mu}}{\Gamma(-v-k-\mu+1-2\lambda)\Gamma(v+k+1-\mu)} J_{v+k}(\gamma(\xi + \alpha)) \\ A_k b_{v,k-2}^{\lambda,\mu} + B_k b_{v,k-1}^{\lambda,\mu} + (C_k - \omega) b_{v,k}^{\lambda,\mu} + D_k b_{v,k+1}^{\lambda,\mu} + E_k b_{v,k+2}^{\lambda,\mu} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_k = \gamma^2 (\alpha^2 - 1) \frac{(v+k-\mu-1)(v+k-\mu)}{4(v+\lambda+k-1)(v+\lambda+k-2)} \\ B_k = \alpha \gamma \frac{(2v+2k+2\lambda-1)(v+k-\mu)}{2(v+\lambda+k-1)} \\ C_k = (v+k)(v+k+2\lambda) + \gamma^2 (\alpha^2 - 1) \times \frac{(v+k)(v+k+2\lambda) + \mu^2 - 1 + (\mu+\lambda)(2\lambda-1)}{2(v+k+\lambda-1)(v+k+\lambda+1)} \\ D_k = \alpha \gamma \frac{(2v+2k+2\lambda+1)(v+k+\mu+2\lambda)}{2(v+\lambda+k+1)} \\ E_k = \gamma^2 (\alpha^2 - 1) \frac{(v+k+\mu+2\lambda)(v+k+\mu+2\lambda+1)}{4(v+k+\lambda+1)(v+k+\lambda+2)} \end{array} \right.$$

Lorsque $\alpha=0$, toujours à partir des passages à la limite η vers 1 ou -1, il vient les deux développements possibles :

$$\left\{ \begin{array}{l} y(\xi) = \xi^{\mu+\lambda-1} (\xi^2 - 1)^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,k}^{\lambda,\mu} J_{v+k}(\gamma \xi) = \xi^{-\lambda} \left(1 - \frac{1}{\xi^2}\right)^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,k}^{\lambda,\mu} J_{v+k}(\gamma \xi) \\ y(\xi) = \xi^{-\mu-\lambda} (\xi^2 - 1)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{b_{v,k}^{\lambda,\mu}}{\Gamma(-v-k-\mu+1-2\lambda)\Gamma(v+k+1-\mu)} J_{v+k}(\gamma \xi) = \xi^{-\lambda} \left(1 - \frac{1}{\xi^2}\right)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{b_{v,k}^{\lambda,\mu}}{\Gamma(-v-k-\mu+1-2\lambda)\Gamma(v+k+1-\mu)} J_{v+k}(\gamma \xi) \end{array} \right.$$

Comme $b_{v,k}^{\lambda,-\mu-2\lambda+1} = \frac{b_{v,k}^{\lambda,\mu}}{\Gamma(-v-k-\mu+1-2\lambda)\Gamma(v+k+1-\mu)} \Rightarrow y(\xi) = \xi^{-\lambda} \left(1 - \frac{1}{\xi^2}\right)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,k}^{\lambda,-\mu-2\lambda+1} J_{v+k}(\gamma \xi)$

$$A_k b_{v,k-2}^{\lambda,\mu} + (C_k - \omega) b_{v,k}^{\lambda,\mu} + E_k b_{v,k+2}^{\lambda,\mu} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} A_k = -\gamma^2 \frac{(v+k-\mu-1)(v+k-\mu)}{4(v+\lambda+k-1)(v+\lambda+k-2)} \\ C_k = (v+k)(v+k+2\lambda) - \gamma^2 \times \frac{(v+k)(v+k+2\lambda) + \mu^2 - 1 + (\mu+\lambda)(2\lambda-1)}{2(v+k+\lambda-1)(v+k+\lambda+1)} \\ E_k = -\gamma^2 \frac{(v+k+\mu+2\lambda)(v+k+\mu+2\lambda+1)}{4(v+k+\lambda+1)(v+k+\lambda+2)} \end{array} \right.$$

Le développement avec $\mu \rightarrow \mu+1-2\lambda$ est également solution radiale de l'équation des ondes hyper-sphéroïdales :

$$\begin{cases} y(\xi) = \xi^{-\mu-\lambda} (\xi^2 - 1)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,k}^{\lambda, -\mu-2\lambda+1} J_{v+k}(\gamma \xi) = \xi^{-\lambda} \left(1 - \frac{1}{\xi^2}\right)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,k}^{\lambda, -\mu-2\lambda+1} J_{v+k}(\gamma \xi) \\ y(\xi) = \xi^{\mu+2\lambda-1-\lambda} (\xi^2 - 1)^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,k}^{\lambda, \mu} J_{v+k}(\gamma \xi) = \xi^{-\lambda} \left(1 - \frac{1}{\xi^2}\right)^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,k}^{\lambda, \mu} J_{v+k}(\gamma \xi) \end{cases}$$

$$A_k b_{v,k-2}^{\lambda, \mu} + (C_k - \omega) b_{v,k}^{\lambda, \mu} + E_k b_{v,k+2}^{\lambda, \mu} = 0 \quad \begin{cases} A_k = -\gamma^2 \frac{(v+k-\mu-1)(v+k-\mu)}{4(v+\lambda+k-1)(v+\lambda+k-2)} \\ C_k = (v+k)(v+k+2\lambda) - \gamma^2 \times \frac{(v+k)(v+k+2\lambda) + \mu^2 - 1 + (\mu+\lambda)(2\lambda-1)}{2(v+k+\lambda-1)(v+k+\lambda+1)} \\ E_k = -\gamma^2 \frac{(v+k+\mu+2\lambda)(v+k+\mu+2\lambda+1)}{4(v+k+\lambda+1)(v+k+\lambda+2)} \end{cases}$$

Tous ces développements en fonctions de Bessel ont été précédemment évoqués.

Prenons pour les valeurs $\eta=1$ ou $\eta=-1$, $\alpha=1$ ou $\alpha=-1$, il vient les quatre développements possibles à trois termes :

$$\alpha = \pm 1 \quad \begin{cases} y_{\eta=1}(\xi) = \left(\frac{(\xi - \alpha)^2}{(\xi - 1)(\xi + 1)} \right)^{\mu+2\lambda-1} (\xi - \alpha)^{-\lambda} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,k}^{\lambda, \mu} J_{v+k}(\gamma (\xi - \alpha)) \\ y_{\eta=-1}(\xi) = \left(\frac{(\xi - 1)(\xi + 1)}{(\xi + \alpha)^2} \right)^{\frac{\mu}{2}} (\xi + \alpha)^{-\lambda} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,k}^{\lambda, -\mu-2\lambda+1} J_{v+k}(\gamma (\xi + \alpha)) \\ y_{\eta=1}(\xi) = \left(\frac{(\xi - \alpha)^2}{(\xi - 1)(\xi + 1)} \right)^{-\mu} (\xi - \alpha)^{-\lambda} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,k}^{\lambda, -\mu-2\lambda+1} J_{v+k}(\gamma (\xi - \alpha)) \\ y_{\eta=-1}(\xi) = \left(\frac{(\xi - 1)(\xi + 1)}{(\xi + \alpha)^2} \right)^{-\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} (\xi + \alpha)^{-\lambda} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,k}^{\mu} J_{v+k}(\gamma (\xi + \alpha)) \end{cases}$$

Sachant que $b_{v,k}^{\lambda, -\mu-2\lambda+1} = \frac{b_{v,k}^{\mu}}{\Gamma(-v-k-\mu+1-2\lambda)\Gamma(v+k+1-\mu)}$

$$B_k b_{v,k-1}^{\lambda, \mu} + (C_k - \omega) b_{v,k}^{\lambda, \mu} + D_k b_{v,k+1}^{\lambda, \mu} = 0 \quad \begin{cases} B_k = \alpha \gamma \frac{(2v+2k+2\lambda-1)(v+k-\mu)}{2(v+\lambda+k-1)} \\ C_k = (v+k)(v+k+2\lambda) \\ D_k = \alpha \gamma \frac{(2v+2k+2\lambda+1)(v+k+\mu+2\lambda)}{2(v+\lambda+k+1)} \end{cases}$$

Dans ce qui suit, on voit clairement que ces deux développements sont équivalents à ceux obtenus avec la substitution $\mu \rightarrow \mu-2\lambda+1$ et $\alpha \rightarrow -\alpha$. Dans ce cas on peut en effet écrire :

$$\begin{aligned} y_{\eta=-1}(\xi, \alpha=1, \mu) &= y_{\eta=1}(\xi, \alpha=-1, -\mu-2\lambda+1) \\ y_{\eta=-1}(\xi, \alpha=-1, \mu) &= y_{\eta=1}(\xi, \alpha=1, -\mu-2\lambda+1) \end{aligned}$$

Si $\alpha = 0 \rightarrow \begin{cases} r = c\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - 1} \\ \eta_0 = \frac{\xi \eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - 1}} \end{cases}$ alors pour une valeur quelconque η fixe les développements de solutions radiales sont de la forme :

$$HS_v^{(1),\lambda,\mu}(\xi, \gamma^2) hps_v^{\lambda,\mu}(\eta, \gamma^2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,k}^{\lambda,\mu} C_{v+k}^{\lambda,\mu} \left(\frac{\xi \eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - 1}} \right) j_{\lambda,v+k}(\gamma \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - 1})$$

$$\text{Dérivation sur } \eta \Rightarrow HS_v^{(1),\lambda,\mu}(\xi, \gamma^2) hps_v^{\lambda,\mu}(\eta, \gamma^2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,k}^{\lambda,\mu} \left\{ \frac{\xi(\xi^2 - 1)}{(\xi^2 + \eta^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} C_{v+k}^{\lambda,\mu} \left(\frac{\xi \eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - 1}} \right) j_{\lambda,v+k}(\gamma \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - 1}) + \right. \\ \left. + \gamma \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - 1}} C_{v+k}^{\lambda,\mu} \left(\frac{\xi \eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - 1}} \right) j_{\lambda,v+k}'(\gamma \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - 1}) \right\}$$

$$\Rightarrow y(\xi) = \frac{1}{hps_v^{\lambda,\mu}(\eta, \gamma^2)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,k}^{\lambda,\mu} \left\{ j_{\lambda,v+k}(\gamma \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - 1}) \frac{d}{d\eta} C_{v+k}^{\lambda,\mu} \left(\frac{\xi \eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - 1}} \right) + \right. \\ \left. C_{v+k}^{\lambda,\mu} \left(\frac{\xi \eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - 1}} \right) \frac{d}{d\eta} j_{\lambda,v+k}(\gamma \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - 1}) \right\}$$

Si $\alpha = 0$ et $\eta = 0 \Rightarrow \eta_0 = 0$ et $r_0 = \sqrt{\xi^2 - 1}$ on obtient le développement possible d'une solution radiale de la forme :

$$\xi > 1 \quad \begin{cases} r_0 = \sqrt{\xi^2 - 1} \\ \eta_0 = 0 \end{cases} \quad y(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,k}^{\lambda,\mu} C_{v+k}^{\lambda,\mu}(0) j_{\lambda,v+k}(\gamma \sqrt{\xi^2 - 1}) \propto (\xi^2 - 1)^{\frac{\lambda}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,k}^{\lambda,\mu} C_{v+k}^{\lambda,\mu}(0) J_{v+k}(\gamma \sqrt{\xi^2 - 1})$$

$$A_k b_{v,k-2}^{\lambda,\mu} + (C_k - \omega) b_{v,k}^{\lambda,\mu} + E_k b_{v,k+2}^{\lambda,\mu} = 0 \quad \begin{cases} A_k = -\gamma^2 \frac{(v+k-\mu-1)(v+k-\mu)}{4(v+\lambda+k-1)(v+\lambda+k-2)} \\ C_k = (v+k)(v+k+2\lambda) - \gamma^2 \times \frac{(v+k)(v+k+2\lambda) + \mu^2 - 1 + (\mu+\lambda)(2\lambda-1)}{2(v+k+\lambda-1)(v+k+\lambda+1)} \\ E_k = -\gamma^2 \frac{(v+k+\mu+2\lambda)(v+k+\mu+2\lambda+1)}{4(v+k+\lambda+1)(v+k+\lambda+2)} \end{cases}$$

Par dérivation sur le paramètre η puis en passant à la limite $\eta \rightarrow 0$, il vient :

$$HS_v^{(1),\lambda,\mu}(\xi, \gamma^2) hps_v^{\lambda,\mu}(0, \gamma^2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,k}^{\lambda,\mu} \left\{ j_{\lambda,v+k}(\gamma \sqrt{\xi^2 - 1}) \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} C_{v+k}^{\lambda,\mu}(0) \right\} = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,k}^{\lambda,\mu} j_{\lambda,v+k}(\gamma \sqrt{\xi^2 - 1}) C_{v+k}^{\lambda,\mu}(0)$$

d'où le développement possible d'une solution radiale de la forme :

$$y(\xi) = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,k}^{\lambda,\mu}(\gamma, \alpha) C_{v+k}^{\lambda,\mu}(0) j_{\lambda,v+k}(\gamma \sqrt{\xi^2 - 1}) \propto \xi (\xi^2 - 1)^{\frac{\lambda+1}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,k}^{\lambda,\mu}(\gamma, \alpha) C_{v+k}^{\lambda,\mu}(0) J_{v+k}(\gamma \sqrt{\xi^2 - 1})$$

$$A_k b_{v,k-2}^{\lambda,\mu} + (C_k - \omega) b_{v,k}^{\lambda,\mu} + E_k b_{v,k+2}^{\lambda,\mu} = 0 \quad \begin{cases} A_k = -\gamma^2 \frac{(v+k-\mu-1)(v+k-\mu)}{4(v+\lambda+k-1)(v+\lambda+k-2)} \\ C_k = (v+k)(v+k+2\lambda) - \gamma^2 \times \frac{(v+k)(v+k+2\lambda) + \mu^2 - 1 + (\mu+\lambda)(2\lambda-1)}{2(v+k+\lambda-1)(v+k+\lambda+1)} \\ E_k = -\gamma^2 \frac{(v+k+\mu+2\lambda)(v+k+\mu+2\lambda+1)}{4(v+k+\lambda+1)(v+k+\lambda+2)} \end{cases}$$

$$\text{Si } \alpha=1 \text{ ou } \alpha=-1 \text{ alors : } \quad \alpha = 1 \rightarrow \begin{cases} r_0 = \xi - \eta \\ \eta_0 = \frac{\xi \eta - 1}{\xi - \eta} \end{cases} \quad \alpha = -1 \rightarrow \begin{cases} r_0 = \xi + \eta \\ \eta_0 = \frac{\xi \eta + 1}{\xi + \eta} \end{cases}$$

Et pour une valeur quelconque η fixe les développements de solutions radiales sont de la forme :

$$y(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{\nu,k}^{\lambda,\mu} C_{\nu+k}^{\lambda,\mu} \left(\frac{\xi \eta \pm 1}{\xi \pm \eta} \right) j_{\lambda,\nu+k}(\gamma (\xi \pm \eta))$$

$$B_k b_{\nu,k-1}^{\lambda,\mu} + (C_k - \omega) b_{\nu,k}^{\lambda,\mu} + D_k b_{\nu,k+1}^{\lambda,\mu} = 0 \quad \begin{cases} B_k = \pm \gamma \frac{(2\nu + 2k + 2\lambda - 1)(\nu + k - \mu)}{2(\nu + \lambda + k - 1)} \\ C_k = (\nu + k)(\nu + k + 2\lambda) \\ D_k = \pm \gamma \frac{(2\nu + 2k + 2\lambda + 1)(\nu + k + \mu + 2\lambda)}{2(\nu + \lambda + k + 1)} \end{cases}$$

Cela donne pour $\eta=0$ un développement possible de la forme :

$$y(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{\nu,k}^{\lambda,\mu} C_{\nu+k}^{\lambda,\mu} \left(\pm \frac{1}{\xi} \right) j_{\lambda,\nu+k}(\gamma \xi)$$

$$B_k b_{\nu,k-1}^{\lambda,\mu} + (C_k - \omega) b_{\nu,k}^{\lambda,\mu} + D_k b_{\nu,k+1}^{\lambda,\mu} = 0 \quad \begin{cases} B_k = \pm \gamma \frac{(2\nu + 2k + 2\lambda - 1)(\nu + k - \mu)}{2(\nu + \lambda + k - 1)} \\ C_k = (\nu + k)(\nu + k + 2\lambda) \\ D_k = \pm \gamma \frac{(2\nu + 2k + 2\lambda + 1)(\nu + k + \mu + 2\lambda)}{2(\nu + \lambda + k + 1)} \end{cases}$$

Passons maintenant aux développements qui concernent uniquement les fonctions hypersphéroïdales angulaires obtenues cette fois en fixant les valeurs de ξ .

$$\begin{cases} \xi > 1 \\ \eta \in [-1,1] \end{cases} \quad \begin{cases} r_0 = \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2) + (\xi \eta - \alpha)^2} \\ \eta_0 = \frac{\xi \eta - \alpha}{\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2) + (\xi \eta - \alpha)^2}} \end{cases}$$

Lorsque ξ tend vers l'infini, il vient :

$$\begin{cases} r_0 = \sqrt{\xi^2 - 2\alpha \xi \eta + \eta^2 - 1 + \alpha^2} \approx \xi \left(1 - \frac{\alpha \eta}{\xi} \right) \approx \xi - \alpha \eta \\ \eta_0 = \frac{\xi \eta - \alpha}{\sqrt{\xi^2 - 2\alpha \xi \eta + \eta^2 - 1 + \alpha^2}} \approx \eta \end{cases}$$

Comme les fonctions de Bessel de troisième et quatrième espèce se comportent à l'infini comme suit :

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \xi \rightarrow \infty} H_{\nu}^{(1)}(\gamma (\xi - \alpha \eta)) &\approx -\frac{i}{\sqrt{\gamma} \xi^{\frac{1}{2}}} e^{i\left(\gamma (\xi - \alpha \eta) - \frac{\nu \pi}{2}\right)} = -\frac{i}{\sqrt{\gamma} \xi^{\frac{1}{2}}} i^{-\nu} e^{i\gamma \xi} e^{-i\gamma \alpha \eta} \\ \lim_{\gamma \xi \rightarrow \infty} H_{\nu}^{(2)}(\gamma (\xi - \alpha \eta)) &\approx \frac{i}{\sqrt{\gamma} \xi} e^{-i\left(\gamma (\xi - \alpha \eta) - \frac{\nu \pi}{2}\right)} = \frac{i}{\sqrt{\gamma} \xi^{\frac{1}{2}}} i^{\nu} e^{-i\gamma \xi} e^{i\gamma \alpha \eta} \\ \lim_{\gamma \xi \rightarrow \infty} HS_{\nu}^{(3),\mu}(\xi, \gamma^2) &\approx -\frac{i}{\gamma^{\frac{\lambda+1}{2}} \xi^{\frac{\lambda+1}{2}}} e^{i\left(\gamma \xi - \frac{\nu \pi}{2}\right)} = -\frac{i}{\gamma^{\frac{\lambda+1}{2}} \xi^{\frac{\lambda+1}{2}}} i^{-\nu} e^{i\gamma \xi} \\ \lim_{\gamma \xi \rightarrow \infty} HS_{\nu}^{(4),\mu}(\xi, \gamma^2) &\approx \frac{i}{\gamma^{\frac{\lambda+1}{2}} \xi^{\frac{\lambda+1}{2}}} e^{-i\left(\gamma \xi - \frac{\nu \pi}{2}\right)} = \frac{i}{\gamma^{\frac{\lambda+1}{2}} \xi^{\frac{\lambda+1}{2}}} i^{\nu} e^{-i\gamma \xi} \end{aligned}$$

En appliquant la formule modifiée de Meixner et Schafke avec les fonctions radiales de troisième et quatrième espèce, on arrive alors à deux développements possibles :

$$\begin{cases} y(\eta) = e^{-i\gamma\alpha\eta} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,k}^{\lambda,\mu} i^{-k} C_{v+k}^{\lambda,\mu}(\eta) \\ y(\eta) = e^{+i\gamma\alpha\eta} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,k}^{\lambda,\mu} i^{+k} C_{v+k}^{\lambda,\mu}(\eta) \end{cases}$$

$$A_k b_{v,k-2}^{\lambda,\mu} + B_k b_{v,k-1}^{\lambda,\mu} + (C_k - \omega) b_{v,k}^{\lambda,\mu} + D_k b_{v,k+1}^{\lambda,\mu} + E_k b_{v,k+2}^{\lambda,\mu} = 0$$

$$\begin{cases} A_k = \gamma^2 (\alpha^2 - 1) \frac{(v+k-\mu-1)(v+k-\mu)}{4(v+\lambda+k-1)(v+\lambda+k-2)} \\ B_k = \alpha \gamma \frac{(2v+2k+2\lambda-1)(v+k-\mu)}{2(v+\lambda+k-1)} \\ C_k = (v+k)(v+k+2\lambda) + \gamma^2 (\alpha^2 - 1) \times \frac{(v+k)(v+k+2\lambda) + \mu^2 - 1 + (\mu+\lambda)(2\lambda-1)}{2(v+k+\lambda-1)(v+k+\lambda+1)} \\ D_k = \alpha \gamma \frac{(2v+2k+2\lambda+1)(v+k+\mu+2\lambda)}{2(v+\lambda+k+1)} \\ E_k = \gamma^2 (\alpha^2 - 1) \frac{(v+k+\mu+2\lambda)(v+k+\mu+2\lambda+1)}{4(v+k+\lambda+1)(v+k+\lambda+2)} \end{cases}$$

En posant $\alpha=0$, alors les indices sautent de 2 en 2 dans la récurrence et l'on obtient le développement classique de la fonction angulaire en fonctions de Gegenbauer associées.

$$y(\eta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,k}^{\lambda,\mu} (-1)^k C_{v+2k}^{\lambda,\mu}(\eta) \quad A_k b_{v,k-1}^{\lambda,\mu} + (C_k - \lambda) b_{v,k}^{\lambda,\mu} + E_k b_{v,k+1}^{\lambda,\mu} = 0$$

$$\begin{cases} A_k = -\gamma^2 \frac{(v+k-\mu-1)(v+k-\mu)}{4(v+\lambda+k-1)(v+\lambda+k-2)} \\ C_k = (v+k)(v+k+2\lambda) - \gamma^2 \times \frac{(v+k)(v+k+2\lambda) + \mu^2 - 1 + (\mu+\lambda)(2\lambda-1)}{2(v+k+\lambda-1)(v+k+\lambda+1)} \\ E_k = -\gamma^2 \frac{(v+k+\mu+2\lambda)(v+k+\mu+2\lambda+1)}{4(v+k+\lambda+1)(v+k+\lambda+2)} \end{cases}$$

A noter également pour $\alpha=1$ ou $\alpha=-1$ que la récurrence est également à trois termes :

$$\begin{cases} y(\eta) = e^{-\pm i\gamma\eta} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,k}^{\lambda,\mu} i^{-k} C_{v+k}^{\lambda,\mu}(\eta) \\ y(\eta) = e^{\pm i\gamma\eta} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,k}^{\lambda,\mu} i^{+k} C_{v+k}^{\lambda,\mu}(\eta) \end{cases} \quad B_k b_{v,k-1}^{\lambda,\mu} + (C_k - \lambda) b_{v,k}^{\lambda,\mu} + D_k b_{v,k+1}^{\lambda,\mu} = 0$$

$$\begin{cases} B_k = \alpha \gamma \frac{(2v+2k+2\lambda-1)(v+k-\mu)}{2(v+\lambda+k-1)} \\ C_k = (v+k)(v+k+2\lambda) \\ D_k = \alpha \gamma \frac{(2v+2k+2\lambda+1)(v+k+\mu+2\lambda)}{2(v+\lambda+k+1)} \end{cases}$$

D'après la formule modifiée de Meixner et Schafke ces deux développements sont censés être réels. Or on voit aussi clairement que ces deux développements sont conjugués l'un de l'autre.

Remarque importante : toutes les récurrences décrites dans ce chapitre ne sont pas définies lorsque le paramètre $v+\lambda$ est un entier hormis le cas très particulier où $\mu+\lambda=1$ (lié très directement aux fonctions de Mathieu), car l'un au moins des termes comporte au moins un pôle pour une valeur de k donnée et ceci dans tous les cas possibles.

Il reste maintenant à démontrer la formule de Meixner et Schafke et cela est une autre affaire !

Tableau synoptique de la construction de solutions angulaires ou radiales de l'équation des ondes sphéroïdales à l'aide des fonctions de Bessel sphériques

Les fonctions de Bessel des quatre espèces décrites ici sont définies comme suit :

$$j_{\lambda,v}(z) = z^{-\lambda} J_v(z) \quad y_{\lambda,v}(z) = z^{-\lambda} Y_v(z) \quad h_v^{(1)}(z) = z^{-\lambda} H_v^{(1)}(z) \quad h_{v+k}^{(2)}(z) = z^{-\lambda} H_v^{(2)}(z)$$

La récurrence à 5 termes sur les coefficients des développements et dépendant des paramètres $\alpha, \mu, \nu, \lambda, \gamma$ et ω est la suivante :

$$A_k b_{\nu,k-2}^{\lambda,\mu} + B_k b_{\nu,k-1}^{\lambda,\mu} + (C_k - \omega) b_{\nu,k}^{\lambda,\mu} + D_k b_{\nu,k+1}^{\lambda,\mu} + E_k b_{\nu,k+2}^{\lambda,\mu} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_k = \gamma^2 (\alpha^2 - 1) \frac{(\nu + k - \mu - 1)(\nu + k - \mu)}{4(\nu + \lambda + k - 1)(\nu + \lambda + k - 2)} \\ B_k = \alpha \gamma \frac{(2\nu + 2k + 2\lambda - 1)(\nu + k - \mu)}{2(\nu + \lambda + k - 1)} \\ C_k = (\nu + k)(\nu + k + 2\lambda) + \gamma^2 (\alpha^2 - 1) \times \frac{(\nu + k)(\nu + k + 2\lambda) + \mu^2 - 1 + (\mu + \lambda)(2\lambda - 1)}{2(\nu + k + \lambda - 1)(\nu + k + \lambda + 1)} \\ D_k = \alpha \gamma \frac{(2\nu + 2k + 2\lambda + 1)(\nu + k + \mu + 2\lambda)}{2(\nu + \lambda + k + 1)} \\ E_k = \gamma^2 (\alpha^2 - 1) \frac{(\nu + k + \mu + 2\lambda)(\nu + k + \mu + 2\lambda + 1)}{4(\nu + k + \lambda + 1)(\nu + k + \lambda + 2)} \end{array} \right.$$

Pour conclure cette étude sur les solutions de l'équation des ondes hyper-sphéroïdales radiales, voici un tableau synoptique qui retrace les divers développements en page suivante.

Domaine	Développement des solutions	Alternatives, substitution	Récurrence, Valeur de α
$\begin{cases} \xi > 1 \\ \eta \in [-1,1] \end{cases}$	$y(\xi, \eta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,k}^{\lambda, \mu} C_{v+k}^{\lambda, \mu} \left(\frac{\xi \eta - \alpha}{\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} + (\xi \eta - \alpha)^2} \right) j_{\lambda, v+k} \left(\gamma \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} + (\xi \eta - \alpha)^2 \right)$	$C_{v+k}^{\lambda, \mu} \rightarrow C_{(Q)v+k}^{\lambda, \mu} \quad j_{\lambda, v+k} \rightarrow y_{\lambda, v+k}, h_{\lambda, v+k}^{(1)}, h_{\lambda, v+k}^{(2)}$ $\mu \leftrightarrow -\mu - 2\lambda + 1$	5 termes
$\begin{cases} \xi > 1 \\ \eta \in [-1,1] \end{cases}$	$y(\xi, \eta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,2k}^{\lambda, \mu} C_{v+2k}^{\lambda, \mu} \left(\frac{\xi \eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - 1}} \right) j_{\lambda, v+2k} \left(\gamma \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - 1} \right)$	$C_{v+2k}^{\lambda, \mu} \rightarrow C_{(Q)v+2k}^{\lambda, \mu} \quad j_{\lambda, v+2k} \rightarrow y_{\lambda, v+2k}, h_{\lambda, v+2k}^{(1)}, h_{\lambda, v+2k}^{(2)}$ $\mu \leftrightarrow -\mu - 2\lambda + 1$	3 termes, $\alpha=0$
$\xi > 1$	$y(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,2k}^{\lambda, \mu} C_{v+2k}^{\lambda, \mu} (0) j_{\lambda, v+2k} \left(\gamma \sqrt{\xi^2 - 1} \right)$	$C_{v+2k}^{\lambda, \mu} \rightarrow C_{(Q)v+2k}^{\lambda, \mu} \quad j_{\lambda, v+2k} \rightarrow y_{\lambda, v+2k}, h_{\lambda, v+2k}^{(1)}, h_{\lambda, v+2k}^{(2)}$ $\mu \leftrightarrow -\mu - 2\lambda + 1$	3 termes, $\alpha=0$
$\xi > 1$	$y(\xi) = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,2k}^{\lambda, \mu} C_{v+2k}^{\lambda, \mu} (0) j_{\lambda, v+2k} \left(\gamma \sqrt{\xi^2 - 1} \right)$	$C_{v+k}^{\lambda, \mu} \rightarrow C_{(Q)v+k}^{\lambda, \mu} \quad j_{\lambda, v+k} \rightarrow y_{\lambda, v+k}, h_{\lambda, v+k}^{(1)}, h_{\lambda, v+k}^{(2)}$ $\mu \leftrightarrow -\mu - 2\lambda + 1$	3 termes, $\alpha=0$
$\xi > 1$	$y(\xi) = \left(\frac{(\xi - \alpha)^2}{(\xi - 1)(\xi + 1)} \right)^{\frac{\mu + 2\lambda - 1}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,k}^{\lambda, \mu} j_{\lambda, v+k} \left(\gamma (\xi - \alpha) \right)$	$j_{\lambda, v+2k} \rightarrow y_{\lambda, v+k}, h_{\lambda, v+k}^{(1)}, h_{\lambda, v+k}^{(2)}$ $\mu \leftrightarrow -\mu - 2\lambda + 1$	5 termes
$\xi > 1$	$y(\xi) = \left(\frac{(\xi + \alpha)^2}{(\xi - 1)(\xi + 1)} \right)^{\frac{\mu + 2\lambda - 1}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,k}^{\lambda, \mu} j_{\lambda, v+k} \left(\gamma (\xi + \alpha) \right)$	$j_{\lambda, v+2k} \rightarrow y_{\lambda, v+k}, h_{\lambda, v+k}^{(1)}, h_{\lambda, v+k}^{(2)}$ $\mu \leftrightarrow -\mu - 2\lambda + 1$	5 termes
$\xi > 1$	$y(\xi) = \left(1 - \frac{1}{\xi^2} \right)^{\frac{\mu + 2\lambda - 1}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,2k}^{\lambda, \mu} j_{\lambda, v+2k} \left(\gamma \xi \right)$	$j_{\lambda, v+2k} \rightarrow y_{\lambda, v+k}, h_{\lambda, v+k}^{(1)}, h_{\lambda, v+k}^{(2)}$ $\mu \leftrightarrow -\mu - 2\lambda + 1$	3 termes, $\alpha=0$
$\xi > 1$	$y(\xi) = \left(\frac{\xi + 1}{\xi - 1} \right)^{\frac{\mu + 2\lambda - 1}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,k}^{\lambda, \mu} j_{\lambda, v+k} \left(\gamma (\xi + 1) \right)$	$j_{\lambda, v+2k} \rightarrow y_{\lambda, v+k}, h_{\lambda, v+k}^{(1)}, h_{\lambda, v+k}^{(2)}$ $\mu \leftrightarrow -\mu - 2\lambda + 1$	3 termes, $\alpha=-1$
$\xi > 1$	$y(\xi) = \left(\frac{\xi - 1}{\xi + 1} \right)^{\frac{\mu + 2\lambda - 1}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,k}^{\lambda, \mu} j_{\lambda, v+k} \left(\gamma (\xi - 1) \right)$	$j_{\lambda, v+2k} \rightarrow y_{\lambda, v+k}, h_{\lambda, v+k}^{(1)}, h_{\lambda, v+k}^{(2)}$ $\mu \leftrightarrow -\mu - 2\lambda + 1$	3 termes, $\alpha=1$
$\begin{cases} \xi > 1 \\ \eta \in [-1,1] \end{cases}$	$y(\xi, \eta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,k}^{\lambda, \mu} C_{v+k}^{\lambda, \mu} \left(\frac{\xi \eta \pm 1}{\xi \pm \eta} \right) j_{\lambda, v+k} \left(\gamma (\xi \pm \eta) \right)$	$C_{v+k}^{\lambda, \mu} \rightarrow C_{(Q)v+k}^{\lambda, \mu} \quad j_{\lambda, v+k} \rightarrow y_{\lambda, v+k}, h_{\lambda, v+k}^{(1)}, h_{\lambda, v+k}^{(2)}$ $\mu \leftrightarrow -\mu - 2\lambda + 1$	3 termes, $\alpha=1$ ou -1
$\xi > 1$	$y(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,k}^{\lambda, \mu} C_{v+k}^{\lambda, \mu} \left(\pm \frac{1}{\xi} \right) j_{\lambda, v+k} \left(\gamma \xi \right)$	$C_{v+k}^{\lambda, \mu} \rightarrow C_{(Q)v+k}^{\lambda, \mu} \quad j_{\lambda, v+k} \rightarrow y_{\lambda, v+k}, h_{\lambda, v+k}^{(1)}, h_{\lambda, v+k}^{(2)}$ $\mu \leftrightarrow -\mu - 2\lambda + 1$	3 termes, $\alpha=1$ ou -1
$\eta \in [-1,1]$	$y(\eta) = e^{-i\gamma\alpha\eta} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,k}^{\lambda, \mu} i^{-k} C_{v+k}^{\lambda, \mu} (\eta)$	$C_{v+k}^{\lambda, \mu} \rightarrow C_{(Q)v+k}^{\lambda, \mu}$ $\mu \leftrightarrow -\mu - 2\lambda + 1$	5 termes
$\eta \in [-1,1]$	$y(\eta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,2k}^{\lambda, \mu} (-1)^k C_{v+2k}^{\lambda, \mu} (\eta)$	$C_{v+k}^{\lambda, \mu} \rightarrow C_{(Q)v+k}^{\lambda, \mu}$ $\mu \leftrightarrow -\mu - 2\lambda + 1$	3 termes, $\alpha=0$
$\eta \in [-1,1]$	$y(\eta) = e^{\pm i\gamma\eta} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,k}^{\lambda, \mu} i^{-k} C_{v+k}^{\lambda, \mu} (\eta)$	$C_{v+k}^{\lambda, \mu} \rightarrow C_{(Q)v+k}^{\lambda, \mu}$ $\mu \leftrightarrow -\mu - 2\lambda + 1$	3 termes, $\alpha=1$ ou -1
$\eta \in [-1,1]$	$y(\eta) = e^{\pm i\gamma\eta} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{v,k}^{\lambda, \mu} i^{+k} C_{v+k}^{\lambda, \mu} (\eta)$	$C_{v+k}^{\lambda, \mu} \rightarrow C_{(Q)v+k}^{\lambda, \mu}$ $\mu \leftrightarrow -\mu - 2\lambda + 1$	3 termes, $\alpha=1$ ou -1

Développement en série de la valeur caractéristiques ω de l'équation des ondes hyper-sphéroïdales allongées lorsque l'hyper-sphéroïdité γ est proche de 0

$$(1-x^2)y''(x) - (2\lambda+1)x y'(x) + \left(\omega + \gamma^2(1-x^2) - \frac{\mu(\mu+2\lambda-1)}{1-x^2} \right) y(x) = 0$$

La récurrence des coefficients du développement d'une solution de la forme :

$$\begin{cases} x \in [-1,1] & hps_{\nu}^{\lambda,\mu}(x, \gamma^2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k d_{\nu,k}^{\lambda,\mu}(\gamma^2) C_{\nu+2k}^{\lambda,\mu}(x) \\ \text{Fonctions associées de Gegenbauer} & C_{\nu+2k}^{\lambda,\mu}(x) \quad x \in [-1,1] \end{cases} \rightarrow hps_{\nu}^{\lambda,\mu}(x,0) = d_{\nu,0}^{\lambda,\mu}(0) C_{\nu}^{\lambda,\mu}(x)$$

se présente originellement comme suit :

$$\begin{aligned} A_k d_{\nu,k-1}^{\lambda,\mu}(\gamma^2) + (B_k - \omega(\gamma^2)) d_{\nu,k}^{\lambda,\mu}(\gamma^2) + C_k d_{\nu,k+1}^{\lambda,\mu}(\gamma^2) &= 0 \quad k \in \{-\infty, \dots, 0, 1, \dots, +\infty\} \\ \begin{cases} A_k = -\gamma^2 \frac{(\nu - \mu + 2k - 1)(\nu - \mu + 2k)}{(2\nu + 4k + 2\lambda - 2)(2\nu + 4k + 2\lambda - 4)} \\ B_k = (\nu + 2k)(\nu + 2k + 2\lambda) - 2\gamma^2 \frac{(\nu + 2k)(\nu + 2k + 2\lambda) + \mu^2 - 1 + (2\lambda - 1)(\mu + \lambda)}{(2\nu + 4k + 2\lambda - 2)(2\nu + 4k + 2\lambda + 2)} \\ C_k = -\gamma^2 \frac{(\nu + \mu + 2k + 2\lambda)(\nu + \mu + 2k + 2\lambda + 1)}{(2\nu + 4k + 2\lambda + 2)(2\nu + 4k + 2\lambda + 4)} \end{cases} \end{aligned}$$

Elle peut aussi s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned} A_k d_{\nu,k-1}^{\lambda,\mu}(\gamma^2) + \left(B_k + \frac{(\nu + 2k)(\nu + 2k + 2\lambda) - \omega(\gamma^2)}{\gamma^2} \right) d_{\nu,k}^{\lambda,\mu}(\gamma^2) + C_k d_{\nu,k+1}^{\lambda,\mu}(\gamma^2) &= 0 \\ \begin{cases} A_k = -\frac{(\nu - \mu + 2k - 1)(\nu - \mu + 2k)}{(2\nu + 4k + 2\lambda - 2)(2\nu + 4k + 2\lambda - 4)} \\ B_k = -2 \frac{(\nu + 2k)(\nu + 2k + 2\lambda) + \mu^2 - 1 + (2\lambda - 1)(\mu + \lambda)}{(2\nu + 4k + 2\lambda - 2)(2\nu + 4k + 2\lambda + 2)} \\ C_k = -\frac{(\nu + \mu + 2k + 2\lambda)(\nu + \mu + 2k + 2\lambda + 1)}{(2\nu + 4k + 2\lambda + 2)(2\nu + 4k + 2\lambda + 4)} \end{cases} \end{aligned}$$

Introduisons un développement de la caractéristique λ et des coefficients du développement sous la forme :

$$\omega(\gamma^2) = \sum_{j=0}^{j=\infty} l_j \gamma^{2j} \quad \frac{d_{\nu,k}^{\lambda,\mu}(\gamma^2)}{d_{\nu,0}^{\lambda,\mu}(\gamma^2)} = \sum_{j=0}^{j=\infty} d_{k,j} \gamma^{2j}$$

Nous connaissons la valeur de la caractéristique et la valeur de la solution pour $\gamma=0$, il vient alors :

$$\omega(0) = l_0 = \nu(\nu + 2\lambda) \quad \frac{d_{\nu,k}^{\lambda,\mu}(0)}{d_{\nu,0}^{\lambda,\mu}(0)} = d_{k,0} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$$

Comme par définition pour le coefficient $k=0$, le rapport est identiquement égal à 1, il vient :

$$\sum_{j=0}^{j=\infty} d_{0,j} \gamma^{2j} \equiv 1 \Rightarrow d_{0,0} = 1 \quad d_{0,j} = 0 \quad j > 0$$

Écrivons la récurrence pour $k=0$:

$$\begin{aligned}
& A_0 \sum_{j=0}^{j=\infty} d_{-1,j} \gamma^{2j} + B_0 + \frac{\nu(\nu+2\lambda)}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma^2} \sum_{j=0}^{j=\infty} l_j \gamma^{2j} + C_0 \sum_{j=0}^{j=\infty} d_{1,j} \gamma^{2j} = 0 \\
& \Leftrightarrow \frac{\nu(\nu+2\lambda)-l_0}{\gamma^2} + B_0 + C_0 d_{1,0} + A_0 d_{-1,0} + A_0 \sum_{j=1}^{j=\infty} d_{-1,j} \gamma^{2j} + \sum_{j=1}^{j=\infty} C_0 d_{1,j} \gamma^{2j} - \sum_{j=1}^{j=\infty} l_j \gamma^{2(j-1)} \\
& \text{Comme } d_{1,0} = d_{-1,0} = 0 \\
& \Leftrightarrow \frac{\nu(\nu+2\lambda)-l_0}{\gamma^2} + B_0 - l_1 + \sum_{j=1}^{j=\infty} (A_0 d_{-1,j} + C_0 d_{1,j} - l_{j+1}) \gamma^{2j} = 0
\end{aligned}$$

Les termes en puissance de γ^2 s'annulant identiquement, il vient :

$$\begin{cases} l_0 = \nu(\nu+2\lambda) \\ l_1 = B_0 \\ l_{j+1} = A_0 d_{-1,j} + C_0 d_{1,j} \end{cases}$$

Cela donne une récurrence permettant de calculer les coefficients l_{j+1} dès lors que l'on connaît les coefficients $d_{-1,j}, d_{1,j}$. Comment maintenant déterminer les coefficients $d_{-1,j}, d_{1,j}$, pour cela retournons à la récurrence de départ et insérons les développements dans la récurrence du terme d'indice k quelconque :

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^{j=\infty} (A_k d_{k-1,j} + C_k d_{k+1,j} + B_k d_{k,j}) \gamma^{2j} + \left((\nu+2k)(\nu+2k+2\lambda) \sum_{j=0}^{j=\infty} d_{k,j} \gamma^{2(j-1)} - \sum_{j=0}^{j=\infty} l_j \gamma^{2(j-1)} \sum_{j=0}^{j=\infty} d_{k,j} \gamma^{2j} \right) = 0 \\
& \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{j=\infty} (A_k d_{k-1,j} + C_k d_{k+1,j} + B_k d_{k,j} + ((\nu+2k)(\nu+2k+2\lambda)-l_0) d_{k,j+1}) \gamma^{2j} + \frac{((\nu+2k)(\nu+2k+2\lambda)-l_0) d_{k,0}}{\gamma^2} - \sum_{j=0}^{j=\infty} l_{j+1} \gamma^{2j} \sum_{j=0}^{j=\infty} d_{k,j} \gamma^{2j} = 0
\end{aligned}$$

Calculons le premier terme en $1/\gamma^2$: $((\nu+2k)(\nu+2k+2\lambda)-l_0) d_{k,0} = 0 \Rightarrow \begin{cases} k=0 \rightarrow l_0 = \nu(\nu+2\lambda), \\ k \neq 0 \rightarrow d_{k,0} = 0 \end{cases}$, il confirme le résultat précédemment établi.

Calculons le terme en γ^{2j} , il vient :

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^{j=\infty} (A_k d_{k-1,j} + C_k d_{k+1,j} + B_k d_{k,j} + ((\nu+2k)(\nu+2k+2\lambda)-l_0) d_{k,j+1}) \gamma^{2j} - \sum_{m=0}^{m=\infty} d_{k,m} \gamma^{2m} \sum_{i=0}^{i=\infty} l_{i+1} \gamma^{2i} = 0 \\
& \sum_{m=0}^{m=\infty} d_{k,m} \gamma^{2m} \sum_{i=0}^{i=\infty} l_{i+1} \gamma^{2i} = \sum_{i=0}^{i=\infty} \sum_{m=0}^{m=\infty} d_{k,m} l_{i+1} \gamma^{2(i+m)} = \sum_{j=0}^{j=\infty} \gamma^{2j} \sum_{i=0}^{i=j} d_{k,j-i} l_{i+1} \leftarrow j = i+m \\
& \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{j=\infty} (A_k d_{k-1,j} + C_k d_{k+1,j} + B_k d_{k,j} + ((\nu+2k)(\nu+2k+2\lambda)-l_0) d_{k,j+1}) \gamma^{2j} - \sum_{j=0}^{j=\infty} \gamma^{2j} \sum_{i=0}^{i=j} d_{k,j-i} l_{i+1} = 0 \\
& \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{j=\infty} \left(A_k d_{k-1,j} + C_k d_{k+1,j} + B_k d_{k,j} + ((\nu+2k)(\nu+2k+2\lambda)-l_0) d_{k,j+1} - \sum_{i=0}^{i=j} d_{k,j-i} l_{i+1} \right) \gamma^{2j} = 0 \\
& \Leftrightarrow A_k d_{k-1,j} + C_k d_{k+1,j} + B_k d_{k,j} + ((\nu+2k)(\nu+2k+2\lambda)-l_0) d_{k,j+1} - \sum_{i=0}^{i=j} d_{k,j-i} l_{i+1} = 0 \\
& \Leftrightarrow d_{k,j+1} = \frac{\sum_{i=0}^{i=j} d_{k,j-i} l_{i+1} - (A_k d_{k-1,j} + C_k d_{k+1,j} + B_k d_{k,j})}{(\nu+2k)(\nu+2\lambda+2k)-l_0} = \frac{\sum_{i=0}^{i=j} d_{k,j-i} l_{i+1} - (A_k d_{k-1,j} + C_k d_{k+1,j} + B_k d_{k,j})}{2k(2k+2\nu+2\lambda)}
\end{aligned}$$

De nouveau il s'agit bien d'une formule réursive, car dès lors que l'on connaît les coefficients d'indice :

$$\{d_{k-1,j}, d_{k+1,j}, d_{k,j}, d_{k,j-1}, \dots, d_{k,j-2}, d_{k,1}\} \text{ et } \{l_1 = B_0, l_2 = A_0 d_{-1,1} + C_0 d_{1,1}, \dots, l_{j+1} = A_0 d_{-1,j} + C_0 d_{1,j}\}$$

Ceux d'indice $j+1$ sont parfaitement définis. L'existence de la récurrence :

$$d_{k,j+1} = \frac{\sum_{i=0}^{j+1} d_{k,j-i} l_{i+1} - (A_k d_{k-1,j} + C_k d_{k+1,j} + B_k d_{k,j})}{2k(2\nu + 2k + 2\lambda)}$$

permet d'établir le résultat important suivant : $\forall k \neq 0 \quad d_{k,j} = 0 \quad \text{pour } j < |k|$. En effet partons de la condition initiale : $d_{k,0} = 0 \quad \text{pour } k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 3, \dots$ qui est vérifiée comme on l'a vu précédemment et conforme à l'hypothèse de récurrence. Supposons la propriété vraie pour j :

$$\forall k \neq 0 \quad j < |k| \Rightarrow j < |k| + 1 \Rightarrow d_{|k|+1,j} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } k > 0 & d_{k+1,j} = 0 \\ \text{Si } k < 0 & d_{k-1,j} = 0 \end{cases} \text{ et } d_{k,j} = 0 \quad \forall i \in \{0, \dots, j\} \quad d_{k,j-i} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Si } k > 0 & d_{k,j+1} = -\frac{A_k d_{k-1,j}}{(\nu + 2k)(\nu + 2k + 2\lambda) - l_0} \\ \text{Si } k < 0 & d_{k,j+1} = -\frac{C_k d_{k+1,j}}{(\nu + 2k)(\nu + 2k + 2\lambda) - l_0} \end{cases}$$

$$\text{Pour } j+1 < |k| \Rightarrow j < |k| - 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } k > 0 & d_{k-1,j} = 0 \\ \text{Si } k < 0 & d_{k+1,j} = 0 \end{cases} \Rightarrow d_{k,j+1} = 0$$

Dans ces conditions le développement du coefficient $d_{k,j}$ est de la forme (pour k pair) :

$$k = \pm 1, \pm 2, \dots \Rightarrow \frac{d_{\nu,k}^{\lambda,\mu}(\gamma^2)}{d_{\nu,0}^{\lambda,\mu}(\gamma^2)} = \sum_{j=0}^{j=\infty} d_{k,j} \gamma^{2j} = \sum_{j=|k|}^{j=\infty} d_{k,j} \gamma^{2j} = O(\gamma^{2|k|})$$

La récurrence s'écrit donc :

$$\begin{aligned} k = \pm 1, \pm 2, \dots \quad \frac{d_{\nu,k}^{\lambda,\mu}(\gamma^2)}{d_{\nu,0}^{\lambda,\mu}(\gamma^2)} &= \sum_{j=|k|}^{j=\infty} d_{k,j} \gamma^{2j} \quad \omega(\gamma^2) = \sum_{j=0}^{j=\infty} l_j \gamma^{2j} \\ A_k &= -\frac{(\nu - \mu + 2k - 1)(\nu - \mu + 2k)}{(2\nu + 4k + 2\lambda - 2)(2\nu + 4k + 2\lambda - 4)} \\ B_k &= -2 \frac{(\nu + 2k)(\nu + 2k + 2\lambda) + \mu^2 - 1 + (2\lambda - 1)(\mu + \lambda)}{(2\nu + 4k + 2\lambda - 2)(2\nu + 4k + 2\lambda + 2)} \\ C_k &= -\frac{(\nu + \mu + 2k + 2\lambda)(\nu + \mu + 2k + 2\lambda + 1)}{(2\nu + 4k + 2\lambda + 2)(2\nu + 4k + 2\lambda + 4)} \\ l_{-1} &= 0 \quad l_0 = \nu(\nu + 2\lambda) \quad l_1 = B_0 = -2 \frac{\nu(\nu + 2\lambda) + \mu^2 - 1 + (2\lambda - 1)(\mu + \lambda)}{(2\nu + 2\lambda - 2)(2\nu + 2\lambda + 2)} \\ l_{j+1} &= A_0 d_{-1,j} + C_0 d_{1,j} \\ d_{0,0} &= 1 \quad d_{k,0} = 0 \leftarrow k \neq 0 \quad d_{0,j} = 0 \quad j > 0 \\ d_{k,j} &= 0 \leftarrow j < |k| \Rightarrow d_{k,j-1-i} = 0 \leftarrow i > j - 1 - |k| \Rightarrow \sum_{i=0}^{i=j-1-|k|} d_{k,j-1-i} l_{i+1} = \sum_{i=0}^{i=j-1-|k|} d_{k,j-1-i} l_{i+1} \\ d_{k,j} &= \frac{\sum_{i=0}^{i=j-1-|k|} d_{k,j-1-i} l_{i+1} - (A_k d_{k-1,j-1} + B_k d_{k,j-1} + C_k d_{k+1,j-1})}{2k(2\nu + 2k + 2\lambda)} \end{aligned}$$

Ici je ne retranscrit que le développement de la valeur caractéristique ω jusqu'à l'ordre 8 :

$$\begin{aligned}
\omega(\gamma^2) &= \sum_{j=0}^{j=\infty} l_j \gamma^{2j} \quad l_0 = v(v+2\lambda) \quad l_1 = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{(\mu+\lambda-2)(\mu+\lambda)}{(v+\lambda-1)(v+\lambda+1)} \right) \\
l_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{(v-\mu-1)(v-\mu)(v+\mu+2\lambda-2)(v+\mu+2\lambda-1)}{(2v+2\lambda-4)(2v+2\lambda-2)^2(2v+2\lambda)(2v-1)} - \frac{(v-\mu+1)(v-\mu+2)(v+\mu+2\lambda)(v+\mu+2\lambda+1)}{(2v+2\lambda)(2v+2\lambda+2)^2(2v+2\lambda+4)(2v+3)} \right) \\
l_3 &= (2\mu+2\lambda)(2\mu+2\lambda-2) \left(\frac{(v-\mu+1)(v-\mu+2)(v+\mu+2\lambda)(v+\mu+2\lambda+1)}{(2v+2\lambda-2)(2v+2\lambda)(2v+2\lambda+2)^3(2v+2\lambda+4)(2v+2\lambda+6)(2v+3)^2} - \frac{(v-\mu-1)(v-\mu)(v+\mu+2\lambda-2)(v+\mu+2\lambda-1)}{(2v+2\lambda-6)(2v+2\lambda-4)(2v+2\lambda-2)^3(2v+2\lambda)(2v+2\lambda+2)(2v-1)^2} \right) \\
l_4 &= 2(2\mu+2\lambda-2)^2(2\mu+2\lambda)^2 A + \frac{B}{16} + \frac{C}{8} + \frac{D}{2} \\
A &= \frac{(v-\mu-1)(v-\mu)(v+\mu+2\lambda-2)(v+\mu+2\lambda)}{(2v+2\lambda-6)^2(2v+2\lambda-4)(2v+2\lambda-2)^4(2v+2\lambda)(2v+2\lambda+2)^2(2v-1)^3} - \\
&\quad - \frac{(v-\mu+1)(v-\mu+2)(v+\mu+2\lambda)(v+\mu+2\lambda+1)}{(2v+2\lambda-2)^2(2v+2\lambda)(2v+2\lambda+2)^4(2v+2\lambda+4)(2v+2\lambda+6)^2(2v+3)^3} \\
B &= \frac{(v-\mu-3)(v-\mu-2)(v-\mu-1)(v-\mu)(v+\mu+2\lambda-4)(v+\mu+2\lambda-3)(v+\mu+2\lambda-2)(v+\mu+2\lambda-1)}{(2v+2\lambda-8)(2v+2\lambda-6)^2(2v+2\lambda-4)^2(2v+2\lambda-2)^2(2v+2\lambda)(2v-3)(2v-1)^2} - \\
&\quad - \frac{(v-\mu+1)(v-\mu+2)(v-\mu+3)(v-\mu+4)(v+\mu+2\lambda)(v+\mu+2\lambda+1)(v+\mu+2\lambda+2)(v+\mu+2\lambda+3)}{(2v+2\lambda)(2v+2\lambda+2)^2(2v+2\lambda+4)^2(2v+2\lambda+6)^2(2v+2\lambda+8)(2v+3)^2(2v+5)} \\
C &= \frac{(v-\mu+1)^2(v-\mu+2)^2(v+\mu+2\lambda)^2(v+\mu+2\lambda+1)^2}{(2v+2\lambda)^2(2v+2\lambda+2)^4(2v+2\lambda+4)^2(2v+3)^3} - \frac{(v-\mu-1)^2(v-\mu)^2(v+\mu+2\lambda-2)^2(v+\mu+2\lambda-1)^2}{(2v+2\lambda-4)^2(2v+2\lambda-2)^4(2v+2\lambda)^2(2v-1)^3} \\
D &= \frac{(v-\mu-1)(v-\mu)(v-\mu+1)(v-\mu+2)(v+\mu+2\lambda-2)(v+\mu+2\lambda-1)(v+\mu+2\lambda)(v+\mu+2\lambda+1)}{(2v+2\lambda-4)(2v+2\lambda-2)^2(2v+2\lambda)^2(2v+2\lambda+2)^2(2v+2\lambda+4)(2v-1)^2(2v+3)^2}
\end{aligned}$$

Développement en série de la valeur caractéristiques ω de l'équation des ondes hyper-sphéroïdales aplaties lorsque l'hyper-sphéroïdité γ est proche de 0

Pour l'équation des ondes sphéroïdale aplaties :

$$(1-x^2)y''(x) - (2\lambda+1)x y'(x) + \left(\omega - \gamma^2(1-x^2) - \frac{\mu(\mu+2\lambda-1)}{1-x^2} \right) y(x) = 0$$

une solution de la forme : $x \in [-1,1]$ $hps_v^{\lambda,\mu}(x, \gamma^2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k d_{v,k}^{\lambda,\mu}(\gamma^2) C_{v+2k}^{\lambda,\mu}(x)$ aura un développement en série autour de la valeur $\gamma=0$ régit par la récurrence suivante :

$$\begin{aligned} k = \pm 1, \pm 2, \dots, \frac{d_{v,k}^{\lambda,\mu}(\gamma^2)}{d_{v,0}^{\lambda,\mu}(\gamma^2)} &= \sum_{j=|k|}^{j=\infty} (-1)^j d_{k,j} \gamma^{2j} & \omega(\gamma^2) &= \sum_{j=0}^{j=\infty} (-1)^j l_j \gamma^{2j} \\ A_k &= -\frac{(v-\mu+2k-1)(v-\mu+2k)}{(2v+4k+2\lambda-2)(2v+4k+2\lambda-4)} \\ B_k &= -2 \frac{(v+2k)(v+2k+2\lambda)+\mu^2-1+(2\lambda-1)(\mu+\lambda)}{(2v+4k+2\lambda-2)(2v+4k+2\lambda+2)} \\ C_k &= -\frac{(v+\mu+2k+2\lambda)(v+\mu+2k+2\lambda+1)}{(2v+4k+2\lambda+2)(2v+4k+2\lambda+4)} \\ l_{-1} &= 0 \quad l_0 = v(v+2\lambda) \quad l_1 = B_0 = -2 \frac{v(v+2\lambda)+\mu^2-1+(2\lambda-1)(\mu+\lambda)}{(2v+2\lambda-2)(2v+2\lambda+2)} \\ l_{j+1} &= A_0 d_{-1,j} + C_0 d_{1,j} \\ d_{0,0} &= 1 \quad d_{k,0} = 0 \leftarrow k \neq 0 \quad d_{0,j} = 0 \quad j > 0 \\ d_{k,j} = 0 \leftarrow j < |k| &\Rightarrow d_{k,j-1-i} = 0 \leftarrow i > j-1-|k| \Rightarrow \sum_{i=0}^{i=j-1} d_{k,j-1-i} l_{i+1} = \sum_{i=0}^{i=j-1-|k|} d_{k,j-1-i} l_{i+1} \\ d_{k,j} &= \frac{\sum_{i=0}^{i=j-1-|k|} d_{k,j-1-i} l_{i+1} - (A_k d_{k-1,j-1} + B_k d_{k,j-1} + C_k d_{k+1,j-1})}{2k(2v+2k+2\lambda)} \end{aligned}$$

Introduction à l'étude du comportement asymptotique des valeurs caractéristiques et des solutions de l'équation des ondes hyper-sphéroïdales lorsque γ très grand

Venons en au comportement asymptotique des valeurs caractéristiques et des solutions de l'équation des ondes hyper-sphéroïdales lorsque γ très grand.

$$(1-x^2)\frac{d^2 y(x)}{dx^2} - (2\lambda+1)\frac{dy(x)}{dx} + \left(\omega + \gamma^2(1-x^2) - \frac{\mu(\mu+2\lambda-1)}{1-x^2} \right) y(x) = 0$$

$$y(x) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} u(x) \Rightarrow (1-x^2)u''(x) - (1+2\mu+2\lambda)xu'(x) + (\omega - \mu(\mu+2\lambda) + \gamma^2(1-x^2))u(x) = 0$$

Avec le changement de variable, l'équation différentielle de la fonction u s'écrit ainsi :

$$x = \frac{t}{\sqrt{2\gamma}} \Rightarrow \left(1 - \frac{t^2}{2\gamma}\right)u''(t) - \frac{1+2\mu+2\lambda}{2\gamma} t u'(t) + \left(\frac{\omega - \mu(\mu+2\lambda) + \gamma^2}{2\gamma} - \frac{t^2}{4} \right) u(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{t^2}{2\gamma}\right)u''(t) - \frac{1+\mu+\frac{2\lambda-1}{2}}{\gamma} t u'(t) + \left(\frac{\omega - \mu(\mu+2\lambda) + \gamma^2}{2\gamma} - \frac{t^2}{4} \right) u(t) = 0$$

Dans l'hypothèse où γ tend vers l'infini et dès lors que la limite suivante existe sous la forme :

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \frac{\omega + \gamma^2}{2\gamma} = l + \frac{1}{2} \Rightarrow u''(t) + \left(l + \frac{1}{2} - \frac{t^2}{4} \right) u(t) = 0$$

L'équation différentielle se transforme en équation de Weber dont les solutions sont les fonctions paraboliques cylindriques, où l s'avère être le nombre de zéros de la fonction parabolique cylindrique sur l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, lorsque l a une valeur entière. Tout comme pour les fonctions sphéroïdales, **l'identification des solutions** se réalisent avec les propriétés de la fonction hyper-sphéroïdale sur $] -1, 1[$ de parité et de la permanence du nombre de zéros lorsque la « sphéroïdité » γ varie de 0 à l'infini. Lorsque ν et μ ne sont pas entiers les fonctions hyper-sphéroïdales ne sont ni paires ni impaires quand bien même $\nu - \mu$ est entier. C'est uniquement dans le cas où ν et μ sont tous deux entiers que la fonction hyper-sphéroïdale de première espèce présente la parité suivante:

$$\nu, \mu \in \mathbb{N} \quad hps_{\nu}^{\lambda, \mu}(-x) = (-1)^{\nu+\mu} hps_{\nu}^{\lambda, \mu}(x) = (-1)^{\nu-\mu} hps_{\nu}^{\lambda, \mu}(x)$$

Cette parité est également présente pour la fonction parabolique cylindrique $D_l(x\sqrt{2\gamma})$ lorsque l est un entier. Pour déterminer la valeur de l , il suffit donc de comparer le nombre de zéros respectifs des deux fonctions. Alors l doit également être le nombre de zéros de la fonction de Gegenbauer associée $C_{\nu}^{\lambda, \mu}(x)$ dans l'intervalle $] -1, 1[$ lorsque $\gamma=0$. Il se trouve que le nombre de zéros dans ce cas ν, μ entiers est exactement $\nu - \mu$, il vient donc $l = \nu - \mu$. Comme on a supposé :

$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \frac{\omega + \gamma^2}{2\gamma} = l + \frac{1}{2} = \nu - \mu + \frac{1}{2}$ alors en première approximation on obtient le comportement asymptotique de la valeur caractéristique λ :

$$\frac{\omega + \gamma^2}{2\gamma} \approx (\nu - \mu) + \frac{1}{2} \Rightarrow \omega \approx -\gamma^2 + \gamma(2(\nu - \mu) + 1)$$

On a donc comme correspondance de la fonction hyper-sphéroïdale de première espèce avec la fonction parabolique cylindrique la relation suivante à la constante multiplicative C_0 près :

$$\text{Lorsque } \gamma \rightarrow \infty \quad hps_{\nu}^{\lambda, \mu}(x) \approx C_0 (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} D_{\nu-\mu}(x\sqrt{2\gamma}) \quad \nu, \mu \in \mathbb{N}$$

Partons maintenant de l'équation des ondes hyper-sphéroïdales aplaties :

$$(1-x^2)\frac{d^2 y(x)}{dx^2} - (2\lambda+1)\frac{d y(x)}{dx} + \left(\omega - \gamma^2(1-x^2) - \frac{\mu(\mu+2\lambda-1)}{1-x^2} \right) y(x) = 0$$

$$y(x) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} e^{-\gamma(1-x)} u(x) \Rightarrow (1-x^2)u''(x) + (2\gamma(1-x^2) - (1+2\lambda+2\mu)x)u'(x) + (\omega - \mu(\mu+2\lambda) - \gamma x(1+2\lambda+2\mu))u(x) = 0$$

$$y(x) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} e^{-\gamma(1+x)} u(x) \Rightarrow (1-x^2)u''(x) + (-2\gamma(1-x^2) - (1+2\lambda+2\mu)x)u'(x) + (\omega - \mu(\mu+2\lambda) + \gamma x(1+2\lambda+2\mu))u(x) = 0$$

Par les deux changements de variable, on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\left. \begin{array}{l} t = 2\gamma(1-x) \\ t = 2\gamma(1+x) \end{array} \right\} \Rightarrow t(4\gamma - t)u''(t) + ((2\mu+2\lambda+1)(2\gamma - t) - t(4\gamma - t))u'(t) + \left(\omega - \mu(\mu+2\lambda) - \frac{2\mu+2\lambda+1}{2}(2\gamma - t) \right) u(t) = 0$$

Lorsque $\gamma \rightarrow \infty$, il vient :

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} 4\gamma t u''(t) + 4\gamma \left(\frac{2\mu+2\lambda+1}{2} - t \right) u'(t) + (\omega - \mu(\mu+2\lambda) - (2\mu+2\lambda+1)\gamma) u(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} t u''(t) + \left(\frac{2\mu+2\lambda+1}{2} - t \right) u'(t) + \left(\frac{\omega}{4\gamma} - \frac{2\mu+2\lambda+1}{4} \right) u(t) = 0$$

Et en supposant que la limite suivante existe : $\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \frac{\omega}{4\gamma} = l + \frac{2\mu+2\lambda+1}{4}$, il vient l'équation différentielle $t u''(t) + \left(\mu + \frac{2\lambda-1}{2} + 1 - t \right) u'(t) + l u(t) = 0$. Cette dernière équation est celle des fonctions de Laguerre où le paramètre l désigne cette fois le nombre de zéros de la fonction de Laguerre $L_l^{\left(\mu + \frac{2\lambda-1}{2}\right)}(t)$ sur l'intervalle $[0, +\infty)$. Il reste également le nombre de zéros des combinaisons linéaires paire et impaire $e^{-\gamma(1-x)} L_l^{\left(\mu + \frac{2\lambda-1}{2}\right)}(2\gamma(1-x)) + (-1)^{v-\mu} e^{-\gamma(1+x)} L_l^{\left(\mu + \frac{2\lambda-1}{2}\right)}(2\gamma(1+x))$ sur l'intervalle $] -1, 1[$ (pour γ tendant vers l'infini). Or la correspondance entre fonctions hyper-sphéroïdales et fonctions asymptote se présente comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} t = 2\gamma(1-x) \\ t = 2\gamma(1+x) \end{array} \right\} \Leftrightarrow x = \pm \left(1 - \frac{t}{2\gamma} \right) \Rightarrow y(x) = \left(\frac{t}{2\gamma} \left(2 - \frac{t}{2\gamma} \right) \right)^{\frac{\mu}{2}} u \left(\pm \left(1 - \frac{t}{2\gamma} \right) \right)$$

Pour la même raison que le nombre de zéros de la fonction hyper-sphéroïdale reste identique quelque soit la variation du paramètre γ , l est alors le nombre de zéros positifs de la fonction de Gegenbauer associée sur l'intervalle $[0, 1]$, soit :

$$l = \begin{cases} \frac{v-\mu}{2} & \text{si } v-\mu \text{ pair} \\ \frac{v-\mu-1}{2} & \text{si } v-\mu \text{ impair} \end{cases}$$

En utilisant la variable τ il vient : $\tau = 2l + \mu + 1 = \begin{cases} v+1 & \text{si } v-\mu \text{ pair} \\ v & \text{si } v-\mu \text{ impair} \end{cases} \quad l = \frac{\tau - \mu - 1}{2}$

Pour l'identification de la solution, on utilise également la propriété de parité de la fonction hyper-sphéroïdale de première espèce uniquement valable lorsque v, μ entiers en construisant deux combinaisons linéaires paire et impaire des fonctions de Laguerre. La correspondance s'établit donc ainsi à une constante multiplicative C_0 près :

$$\text{Lorsque } \gamma \rightarrow \infty \quad hps_v^{\lambda, \mu}(x) \approx C_0 (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} \left(e^{-\gamma(1-x)} L_l^{\left(\mu + \frac{2\lambda-1}{2}\right)}(2\gamma(1-x)) + (-1)^{v-\mu} e^{-\gamma(1+x)} L_l^{\left(\mu + \frac{2\lambda-1}{2}\right)}(2\gamma(1+x)) \right)$$

Développement en série de fonctions paraboliques cylindriques des fonctions d'ondes hyper-sphéroïdales allongées

Les résultats précédents sur la forme limite des solutions suggèrent un développement en fonctions paraboliques cylindriques de la forme :

$$y(x) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} C_k D_{l+2k}(x\sqrt{2\gamma}) = \left(1 - \frac{t^2}{2\gamma}\right)^{\frac{\mu}{2}} u(t) \Leftrightarrow u(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} C_k D_{l+2k}(t)$$

En injectant ce développement dans l'équation des ondes sphéroïdales transformées en variable

$$t = x\sqrt{2\gamma}, \quad \text{soit :} \quad \left(1 - \frac{t^2}{2\gamma}\right) u''(t) - \frac{1+\mu+\frac{2\lambda-1}{2}}{\gamma} t u'(t) + \left(\frac{\omega - \mu(\mu+2\lambda) + \gamma^2}{2\gamma} - \frac{t^2}{4}\right) u(t) = 0. \quad \text{Cette}$$

équation différentielle est équivalente à l'équation différentielle suivante, par la substitution de deux paramètres :

$$\tilde{\mu} = \mu + \lambda - \frac{1}{2} \quad \tilde{\omega} = \omega + \lambda^2 - \frac{1}{4} \Rightarrow \left(1 - \frac{t^2}{2\gamma}\right) u''(t) - \frac{1+\tilde{\mu}}{\gamma} t u'(t) + \left(\frac{\tilde{\omega} - \tilde{\mu}(\tilde{\mu}+1) + \gamma^2}{2\gamma} - \frac{t^2}{4}\right) u(t) = 0$$

Il s'agit de la même équation différentielle que celle obtenue lors du développement asymptotique des fonctions sphéroïdales allongées. Il est donc facile de déterminer une relation de récurrence entre les coefficients C_k . Pour cela on utilise les propriétés des fonctions paraboliques cylindriques aux plus proches voisins :

$$\begin{cases} \frac{d^2 D_\rho(t)}{dt^2} + \left(\rho + \frac{1}{2} - \frac{t^2}{4}\right) D_\rho(t) = 0 \\ D_{\rho+1}(t) - t D_\rho(t) + \rho D_{\rho-1}(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t D_\rho(t) = D_{\rho+1}(t) + \rho D_{\rho-1}(t) \\ t D_{\rho+1}(t) = D_{\rho+2}(t) + (\rho+1) D_\rho(t) \\ t D_{\rho-1}(t) = D_\rho(t) + (\rho-1) D_{\rho-2}(t) \end{cases} \\ \frac{dD_\rho(t)}{dt} = \frac{t}{2} D_\rho(t) - D_{\rho+1}(t) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} t^2 D_\rho(t) &= t D_{\rho+1}(t) + \rho t D_{\rho-1}(t) = D_{\rho+2}(t) + (2\rho+1) D_\rho(t) + \rho(\rho-1) D_{\rho-2}(t) \\ t^2 D_{\rho+2}(t) &= D_{\rho+4}(t) + (2\rho+5) D_{\rho+2}(t) + (\rho+2)(\rho+1) D_\rho(t) \\ t^2 D_{\rho-2}(t) &= D_\rho(t) + (2\rho-3) D_{\rho-2}(t) + (\rho-2)(\rho-3) D_{\rho-4}(t) \\ \left\{ \begin{aligned} t^4 D_\rho(t) &= t^2 D_{\rho+2}(t) + (2\rho+1) t^2 D_\rho(t) + \rho(\rho-1) t^2 D_{\rho-2}(t) \\ &= D_{\rho+4}(t) + 2(2\rho+3) D_{\rho+2}(t) + 2(2\rho^2+2\rho+1) D_\rho(t) + 2\rho(\rho-1)(2\rho-1) D_{\rho-2}(t) + \rho(\rho-1)(\rho-2)(\rho-3) D_{\rho-4}(t) \end{aligned} \right. \\ t D_\rho'(t) &= \frac{t^2}{2} D_\rho(t) - t D_{\rho+1}(t) = -\frac{1}{2} D_{\rho+2}(t) - \frac{1}{2} D_\rho(t) + \frac{1}{2} \rho(\rho-1) D_{\rho-2}(t) \\ \left\{ \begin{aligned} t^2 D_\rho''(t) &= \frac{t^4}{4} D_\rho(t) - \frac{2\rho+1}{2} t^2 D_\rho(t) = \\ &= \frac{1}{4} D_{\rho+4}(t) + D_{\rho+2}(t) - \frac{2\rho^2+2\rho-1}{4} D_\rho(t) - \rho(\rho-1) D_{\rho-2}(t) + \frac{1}{4} \rho(\rho-1)(\rho-2)(\rho-3) D_{\rho-4}(t) \end{aligned} \right. \\ D_\rho''(t) &= -\frac{2\rho+1}{2} D_\rho(t) + \frac{t^2}{4} D_\rho(t) = \frac{D_{\rho+2}(t) - (2\rho+1) D_\rho(t) + \rho(\rho-1) D_{\rho-2}(t)}{4} \end{aligned}$$

Le terme de coefficient C_k lorsque l'on injecte toutes ces expressions dans l'équation différentielle donne donc :

$$\begin{aligned}
& D_{l+2k}''(t) - \frac{t^2 D_{l+2k}''(t)}{2\gamma} - \frac{1+\tilde{\mu}}{\gamma} t D_{l+2k}'(t) + \frac{\tilde{\omega} - \tilde{\mu}(\tilde{\mu}+1) + \gamma^2}{2\gamma} D_{l+2k}(t) - \frac{t^2 D_{l+2k}(t)}{4} = 0 \\
& \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{8\gamma} D_{l+2k+4}(t) + \frac{\tilde{\mu}}{2\gamma} D_{l+2k+2}(t) + \left(-\frac{2(l+2k)+1}{2} + \frac{4\tilde{\omega} + 4\gamma^2 + 3 - 4\tilde{\mu}^2 + 2(2\lambda-1)(1-2\mu) + 2(l+2k)^2 + 2(l+2k)}{8\gamma} \right) D_{l+2k}(t) + \right. \\
& \quad \left. -\frac{\tilde{\mu}}{2\gamma} (l+2k)(l+2k-1) D_{l+2k-2}(t) - \frac{1}{8\gamma} (l+2k)(l+2k-1)(l+2k-2)(l+2k-3) D_{l+2k-4}(t) \right) = 0 \\
& \Leftrightarrow \left(D_{l+2k+4}(t) - 4\tilde{\mu} D_{l+2k+2}(t) - \left(4\tilde{\omega} + 4\gamma^2 + 3 - 4\tilde{\mu}^2 + 2(l+2k)^2 + 2(l+2k) - 4\gamma(2(l+2k)+1) \right) D_{l+2k}(t) + \right. \\
& \quad \left. + 4\tilde{\mu} (l+2k)(l+2k-1) D_{l+2k-2}(t) + (l+2k)(l+2k-1)(l+2k-2)(l+2k-3) D_{l+2k-4}(t) \right) = 0
\end{aligned}$$

Si maintenant l'on considère la contrainte de l'annulation de chaque terme de la fonction $D_{l+2k}(t)$ du développement, on obtient une récurrence à 5 termes :

$$\left(C_{k-2} - 4\tilde{\mu} C_{k-1} - \left(4\tilde{\omega} + 4\gamma^2 + 3 - 4\tilde{\mu}^2 + 2(l+2k)^2 + 2(l+2k) - 4\gamma(2(l+2k)+1) \right) C_k + \left(4\tilde{\mu} (l+2k+2)(l+2k+1) C_{k+1} + (l+2k+4)(l+2k+3)(l+2k+2)(l+2k+1) C_{k+2} \right) \right) = 0$$

Pour $k = \pm 1, k = \pm 2, k = \pm 3, \dots$

La première conséquence de l'existence de cette récurrence est que l'on peut appliquer une méthode matricielle pour déterminer, lorsque γ est suffisamment grand, et que l'on prend suffisamment de termes du développement, une valeur approchée de la valeur caractéristique λ et une valeur approchée de la fonction d'onde sphéroïdale de première espèce par exemple. Mais pour l'instant je laisse ce point de côté, essentiellement numérique

Ici, je me concentre tout d'abord sur les premiers termes de développement en puissance de $1/\gamma$. Pour cela supposons que la valeur caractéristique λ et les coefficients C_k se développent comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\omega} = \sum_{j=-2}^{j=+\infty} \Gamma_j \gamma^{-j} \\ C_k = \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_{k,j} \gamma^{-j} \end{array} \right. \text{ sachant que } \left\{ \begin{array}{l} C_0 = c_{0,0} \Rightarrow c_{0,j} = 0 \quad j > 0 \\ C_k = \sum_{j=1}^{j=+\infty} c_{k,j} \gamma^{-j} \quad k \neq 0 \Rightarrow c_{k,0} = 0 \quad k \neq 0 \end{array} \right.$$

Et injectons ces développements dans la récurrence à 5 termes pour d'abord déterminer les deux premiers termes en γ^2 et γ du développement de λ :

$$\left(\sum_{j=0}^{j=+\infty} c_{k-2,j} \gamma^{-j} - 4\tilde{\mu} \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_{k-1,j} \gamma^{-j} - \left(4 \sum_{j=-2}^{j=+\infty} \Gamma_j \gamma^{-j} + 4\gamma^2 - 4\gamma(2(l+2k)+1) + 3 - 4\tilde{\mu}^2 + 2(l+2k)^2 + 2(l+2k) \right) \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_{k,j} \gamma^{-j} + \right. \\
\left. + 4\tilde{\mu} (l+2k+2)(l+2k+1) \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_{k+1,j} \gamma^{-j} + (l+2k+4)(l+2k+3)(l+2k+2)(l+2k+1) \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_{k+2,j} \gamma^{-j} \right) = 0$$

Terme en $\gamma^2 \rightarrow 4(\Gamma_{-2} + 1)\gamma^2 = 0 \Rightarrow \Gamma_{-2} = -1$

Terme en $\gamma \rightarrow (4\gamma \Gamma_{-1} - 4\gamma(2(l+2k)+1))c_{k,0} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_{k,0} = 0 \quad k \neq 0 \\ k = 0 \Rightarrow \Gamma_{-1} = 2l+1 \end{array} \right.$

Voyons maintenant le terme en $1/\gamma^j$ pour $j=0,1,\dots$ (attention j inverse le signe de membre gauche) :

$$\left(- \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_{k-2,j} \gamma^{-j} + 4\tilde{\mu} \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_{k-1,j} \gamma^{-j} + \left(4 \sum_{j=-2}^{j=+\infty} \Gamma_j \gamma^{-j} + 4\gamma^2 - 4\gamma(2(l+2k)+1) + 3 - 4\mu^2 + 2(2\lambda-1)(1-2\mu) + 2(l+2k)^2 + 2(l+2k) \right) \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_{k,j} \gamma^{-j} - \right. \\ \left. - 4\tilde{\mu}(l+2k+2)(l+2k+1) \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_{k+1,j} \gamma^{-j} + (l+2k+4)(l+2k+3)(l+2k+2)(l+2k+1) \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_{k+2,j} \gamma^{-j} \right) = 0$$

$$\text{Posons } \begin{cases} \alpha_k = 2(l+2k)^2 + 2(l+2k) + 3 - 4\tilde{\mu}^2 \\ \beta_k = 16k \\ \chi_k = 4\tilde{\mu}(l+2k+2)(l+2k+1) \\ \delta_k = (l+2k+4)(l+2k+3)(l+2k+2)(l+2k+1) \end{cases} \quad \text{De plus } \sum_{i=0}^{i=+\infty} \sum_{j=0}^{j=+\infty} \Gamma_i c_{k,j} \gamma^{-(i+j)} = \sum_{j=0}^{j=+\infty} \gamma^{-j} \sum_{i=0}^{i=j} \Gamma_i c_{k,j-i}$$

$$\text{Terme en } \frac{1}{\gamma^l} \rightarrow c_{k,l+1} = \frac{1}{\beta_k} \left(-c_{k-2,l} + 4\tilde{\mu} c_{k-1,l} - \chi_k c_{k+1,l} - \delta_k c_{k+2,l} + (4\Gamma_0 + \alpha_k) c_{k,l} + 4 \sum_{i=1}^{i=j-1} \Gamma_i c_{k,j-i} \right) \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Connaissant tous les coefficients $c_{n,m}$ au niveau $m \leq l$ et les coefficients Γ_n au niveau $n \leq l$, on peut alors déterminer les coefficients $c_{n,l+1}$. Pour la valeur spécifique $k=0$, il vient :

$$\begin{aligned} \text{Terme en } \frac{1}{\gamma^0} &\rightarrow -c_{-2,j} + 4\tilde{\mu} c_{-1,j} + 4\Gamma_l c_{0,0} + \alpha_0 c_{0,j} - \chi_0 c_{1,l} - \delta_0 c_{2,j} = 0 \\ &\Leftrightarrow 4\Gamma_j c_{0,0} = c_{-2,j} - 4\tilde{\mu} c_{-1,j} - \alpha_0 c_{0,j} + \chi_0 c_{1,j} + \delta_0 c_{2,j} \\ &\Leftrightarrow \Gamma_j = \frac{1}{4} \left(\frac{c_{-2,j}}{c_{0,0}} - 4\tilde{\mu} \frac{c_{-1,j}}{c_{0,0}} - \alpha_0 \frac{c_{0,j}}{c_{0,0}} + \chi_0 \frac{c_{1,j}}{c_{0,0}} + \delta_0 \frac{c_{2,j}}{c_{0,0}} \right) \end{aligned}$$

Cela permet donc de compléter le calcul des coefficients Γ_l à partir de la connaissance des coefficients $c_{n,l}$. Si l'on normalise tous les coefficients c par le rapport : $c_{n,m}/c_{0,0}$, alors on arrive aux deux relations de récurrence combinées :

$$\tilde{c}_{n,m} = \frac{c_{n,m}}{c_{0,0}} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_k = 2(l+2k)^2 + 2(l+2k) + 3 - 4\tilde{\mu}^2 \\ \alpha_0 = 2l^2 + 2l + 3 - 4\tilde{\mu}^2 \\ \alpha_k - \alpha_0 = 4k(2l+2k+1) \\ \beta_k = 16k \\ \chi_k = 4\tilde{\mu}(l+2k+2)(l+2k+1) \\ \delta_k = (l+2k+4)(l+2k+3)(l+2k+2)(l+2k+1) \\ \tilde{c}_{0,0} = 1 \quad \tilde{c}_{0,l} = 0 \quad l > 0 \quad \tilde{c}_{k,0} = 0 \quad k \neq 0 \\ \tilde{c}_{k,1} = \frac{1}{\beta_k} (-\tilde{c}_{k-2,0} + 4\tilde{\mu} \tilde{c}_{k-1,0} - \chi_k \tilde{c}_{k+1,0} - \delta_k \tilde{c}_{k+2,0}) \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \\ \tilde{c}_{k,j+1} = \frac{1}{\beta_k} \left(-\tilde{c}_{k-2,j} + 4\tilde{\mu} \tilde{c}_{k-1,j} - \chi_k \tilde{c}_{k+1,j} - \delta_k \tilde{c}_{k+2,j} + (4\Gamma_0 + \alpha_k) \tilde{c}_{k,l} + 4 \sum_{i=1}^{i=j-1} \Gamma_i \tilde{c}_{k,j-i} \right) \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \\ \Leftrightarrow \tilde{c}_{k,j+1} = \frac{1}{\beta_k} \left(-\tilde{c}_{k-2,j} + 4\tilde{\mu} \tilde{c}_{k-1,j} - \chi_k \tilde{c}_{k+1,j} - \delta_k \tilde{c}_{k+2,j} + (\alpha_k - \alpha_0) \tilde{c}_{k,j} + 4 \sum_{i=1}^{i=j-1} \Gamma_i \tilde{c}_{k,j-i} \right) \quad j > 1 \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \\ \Gamma_{-2} = -1 \quad \Gamma_{-1} = 2l+1 \quad \Gamma_0 = -\frac{1}{4} \alpha_0 \\ \Gamma_j = \frac{1}{4} (\tilde{c}_{-2,j} - 4\tilde{\mu} \tilde{c}_{-1,j} + \chi_0 \tilde{c}_{1,j} + \delta_0 \tilde{c}_{2,j}) \quad l > 0 \end{cases}$$

J'ai vérifié cet algorithme de récurrence d'après le programme Mathematica élaboré par P.Falloon et j'ai retrouvé exactement les valeurs données par NIST Handbook of Mathematical Functions, 30.9 Asymptotic Approximations and Expansions, Formules 30.9.1, 30.9.2 et 30.9.3, mais avec les nouveaux paramètres $\tilde{\mu}, \tilde{\omega}$:

$$l = \nu - \mu \quad q = 2l + 1 \quad \tilde{\mu} = \mu + \lambda - \frac{1}{2} \quad \tilde{\omega} = \omega + \lambda^2 - \frac{1}{4}$$

$$\tilde{\omega} \approx \Gamma_{-2} \gamma^2 + \Gamma_{-1} \gamma + \Gamma_0 + \frac{\Gamma_1}{\gamma} + \frac{\Gamma_2}{\gamma^2} + \frac{\Gamma_3}{\gamma^3} + \frac{\Gamma_4}{\gamma^4} + \frac{\Gamma_5}{\gamma^5} \Rightarrow \omega \approx \Gamma_{-2} \gamma^2 + \Gamma_{-1} \gamma + \left(\Gamma_0 + \frac{1}{4} - \lambda^2 \right) + \frac{\Gamma_1}{\gamma} + \frac{\Gamma_2}{\gamma^2} + \frac{\Gamma_3}{\gamma^3} + \frac{\Gamma_4}{\gamma^4} + \frac{\Gamma_5}{\gamma^5}$$

$$\Gamma_{-2} = -1 \quad \Gamma_{-1} = 2l + 1 \quad \Gamma_0 = \frac{8\tilde{\mu}^2 - q^2 - 5}{8}$$

$$2^6 \Gamma_1 = -q(11 + q^2 - 32\tilde{\mu}^2) \quad 2^{10} \Gamma_2 = -(q^4 + 26q^2 + 21) + 384\tilde{\mu}^2(q^2 + 1)$$

$$2^{14} \Gamma_3 = -33q^5 - 1594q^3 - 5621q + 128q(167 + 37q^2)\tilde{\mu}^2 - 2048q\tilde{\mu}^4$$

$$2^{16} \Gamma_4 = -63q^6 - 4940q^4 - 43327q^2 - 22470 + 640(147 + 262q^2 + 23q^4)\tilde{\mu}^2 - 24576(q^2 + 1)\tilde{\mu}^4$$

$$2^{20} \Gamma_5 = -527q^7 - 61529q^5 - 1043961q^3 - 2241599q + 32q(298951 + 127550q^2 + 5739q^4)\tilde{\mu}^2 - 10240q(301 + 71q^2)\tilde{\mu}^4 + 65536q\tilde{\mu}^6$$

Je vais maintenant démontrer deux propriétés supplémentaires importantes de ce développement :

$$\text{Asymptote}_{hps_v^{\lambda, \mu}}(x, \gamma^2) = (1 - x^2)^{\frac{\mu}{2}} C_0 \sum_{j=0}^{j=+\infty} \gamma^{-j} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \tilde{c}_{k,j} D_{l+2k}(x\sqrt{2\gamma}) \quad l = \nu - \mu$$

$$\alpha_k = 2(l + 2k)^2 + 2(l + 2k) + 3 - 4\tilde{\mu}^2$$

$$\alpha_0 = 2l^2 + 2l + 3 - 4\tilde{\mu}^2$$

$$\alpha_k - \alpha_0 = 4k(2l + 2k + 1)$$

$$\beta_k = 16k$$

$$\chi_k = 4\tilde{\mu}(l + 2k + 2)(l + 2k + 1)$$

$$\delta_k = (l + 2k + 4)(l + 2k + 3)(l + 2k + 2)(l + 2k + 1)$$

$$\tilde{c}_{0,0} = 1 \quad \tilde{c}_{0,j} = 0 \quad j > 0 \quad \tilde{c}_{k,0} = 0 \quad k \neq 0$$

$$\tilde{c}_{k,1} = \frac{1}{\beta_k} (-\tilde{c}_{k-2,0} + 4\tilde{\mu} \tilde{c}_{k-1,0} - \chi_k \tilde{c}_{k+1,0} - \delta_k \tilde{c}_{k+2,0}) \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \quad j > 1$$

$$\tilde{c}_{k,j+1} = \frac{1}{\beta_k} \left(-\tilde{c}_{k-2,j} + 4\tilde{\mu} \tilde{c}_{k-1,j} - \chi_k \tilde{c}_{k+1,j} - \delta_k \tilde{c}_{k+2,j} + (\alpha_k - \alpha_0) \tilde{c}_{k,j} + 4 \sum_{i=1}^{i=j-1} \Gamma_i \tilde{c}_{k,j-i} \right) \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \quad j > 1$$

$$\Gamma_{-2} = -1 \quad \Gamma_{-1} = 2l + 1 \quad \Gamma_0 = -\frac{1}{4} \alpha_0$$

$$\Gamma_j = \frac{1}{4} (\tilde{c}_{-2,j} - 4\tilde{\mu} \tilde{c}_{-1,j} + \chi_0 \tilde{c}_{1,j} + \delta_0 \tilde{c}_{2,j}) \quad j > 0$$

$$\text{Asymptote}_{hps_v^{\lambda, \mu}}(x, \gamma^2) = (1 - x^2)^{\frac{\mu}{2}} C_0 \sum_{j=0}^{j=+\infty} \gamma^{-j} \sum_{k=-2j}^{k=2j} \tilde{c}_{k,j} D_{l+2k}(x\sqrt{2\gamma})$$

$$\text{Deux propriétés supplémentaires} \quad \begin{cases} \tilde{c}_{k,j} = 0 & \text{tel que } |k| > 2j \\ \tilde{c}_{k,j} = 0 & \text{tel que } l + 2k < 0 \end{cases}$$

La première propriété à démontrer est celle-ci: $\tilde{c}_{k,j} = 0$ tel que $|k| > 2j$. La propriété est vraie pour $j=0$. Pour $j=1$, il vient :

$$\tilde{c}_{k,1} = \frac{1}{\beta_k} \left(-\tilde{c}_{k-2,j} + 4\tilde{\mu} c_{k-1,j} - \chi_k \tilde{c}_{k+1,j} - \delta_k \tilde{c}_{k+2,j} + (\alpha_k - \alpha_0) \tilde{c}_{k,j} + 4 \sum_{i=1}^{j-1} \Gamma_i \tilde{c}_{k,j-i} \right) \quad \begin{cases} k = \pm 1 \Rightarrow \tilde{c}_{k,1} = \frac{1}{\beta_k} (4\mu \tilde{c}_{k-1,0} - \chi_k \tilde{c}_{k+1,0}) \neq 0 \\ k = \pm 2 \Rightarrow \tilde{c}_{k,1} = \frac{1}{\beta_k} (-\tilde{c}_{k-2,0} - \delta_k \tilde{c}_{k+2,0}) \neq 0 \Rightarrow \tilde{c}_{k,1} = 0 \text{ tel que } |k| > 2 \\ k = \pm 3 \Rightarrow \tilde{c}_{k,1} = 0 \end{cases}$$

Si elle est vrai pour j l'est-elle pour $j+1$:

$$\tilde{c}_{k,j} = 0 \text{ tel que } |k| > 2j$$

$$\tilde{c}_{k,j+1} = \frac{1}{\beta_k} \left(-\tilde{c}_{k-2,j} + 4\tilde{\mu} c_{k-1,j} - \chi_k \tilde{c}_{k+1,j} - \delta_k \tilde{c}_{k+2,j} + (\alpha_k - \alpha_0) \tilde{c}_{k,j} + 4 \sum_{i=1}^{j-1} \Gamma_i \tilde{c}_{k,j-i} \right)$$

$$\text{Supposons } |k| > 2(j+1) > 2(j-i) \quad \forall i \in [1, j-1] \Rightarrow \tilde{c}_{k,j} = 0 \quad \tilde{c}_{k,j-i} = 0$$

$$\begin{cases} \text{Si } k > 0 \Rightarrow \tilde{c}_{k+1,j} = \tilde{c}_{k+2,j} = 0 \Rightarrow \tilde{c}_{k,j+1} = \frac{1}{\beta_k} (-\tilde{c}_{k-2,j} + 4\tilde{\mu} c_{k-1,j}) \text{ et } k-1 > 2j+1 \text{ et } k-2 > 2j \Rightarrow \tilde{c}_{k,j+1} = 0 \\ \text{Si } k < 0 \Rightarrow \tilde{c}_{k-1,j} = \tilde{c}_{k-2,j} = 0 \Rightarrow \tilde{c}_{k,j+1} = \frac{1}{\beta_k} (-\chi_k \tilde{c}_{k+1,j} - \delta_k \tilde{c}_{k+2,j}) \text{ et } k+1 < -2j-1 \text{ et } k+2 < -2j \Rightarrow \tilde{c}_{k,j+1} = 0 \end{cases}$$

La première propriété est démontrée.

La deuxième propriété est la suivante : $\tilde{c}_{k,j} = 0$ tel que $l+2k < 0$. La propriété est vrai pour $j=1$, en effet :

$$\tilde{c}_{0,0} = 1 \quad \begin{cases} \beta_k = 16k \Rightarrow \beta_{-1} = -16 \quad \beta_{-2} = -32 \\ \chi_k = 4\tilde{\mu}(l+2k+2)(l+2k+1) \Rightarrow \chi_{-1} = 4\tilde{\mu}l(l-1) \\ \delta_k = (l+2k+4)(l+2k+3)(l+2k+2)(l+2k+1) \Rightarrow \delta_{-2} = l(l-1)(l-2)(l-3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = -1 \Rightarrow \tilde{c}_{-1,1} = -\frac{\chi_{-1}\tilde{c}_{0,0}}{\beta_{-1}} = \frac{\tilde{\mu}l(l-1)}{4} = 0 \text{ pour } l < 2 \\ k = -2 \Rightarrow \tilde{c}_{-2,1} = -\frac{\delta_{-1}\tilde{c}_{0,0}}{\beta_{-2}} = \frac{l(l-1)(l-2)(l-3)}{32} \text{ pour } l < 4 \end{cases}$$

Si la propriété est vrai pour j , l'est-elle pour $j+1$:

$$\tilde{c}_{k,j+1} = \frac{1}{\beta_k} \left(-\tilde{c}_{k-2,j} + 4\tilde{\mu} c_{k-1,j} - \chi_k \tilde{c}_{k+1,j} - \delta_k \tilde{c}_{k+2,j} + (\alpha_k - \alpha_0) \tilde{c}_{k,j} + 4 \sum_{i=1}^{j-j-1} \Gamma_i \tilde{c}_{k,j-i} \right)$$

$$\tilde{c}_{k,j} = 0 \text{ tel que } l+2k < 0 \Rightarrow \tilde{c}_{k-1,j} = \tilde{c}_{k-2,j} = 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in [1, j-1] \quad \tilde{c}_{k,j-i} = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{c}_{k,j+1} = -\frac{1}{\beta_k} (\chi_k \tilde{c}_{k+1,j} + \delta_k \tilde{c}_{k+2,j}) = -\frac{(l+2k+2)(l+2k+1)}{\beta_k} (4\tilde{\mu} \tilde{c}_{k+1,j} + (l+2k+4)(l+2k+3) \tilde{c}_{k+2,j})$$

$$\text{Pour } k \in [-2j, -1] \text{ et } l+2k < 0 \Rightarrow \tilde{c}_{k,j} = 0 \text{ notamment } \tilde{c}_{-2j,j} = 0 \text{ si } l < 4j \text{ et } \tilde{c}_{-2j+1,j} = 0 \text{ si } l < 4j-2$$

$$\text{Si } k = -1 \Rightarrow \tilde{c}_{-1,j+1} = -\frac{l(l-1)(l+1)(l+2)}{\beta_{-1}} \tilde{c}_{1,j} = 0 \text{ si } l < 2$$

$$\text{Si } k = -2 \Rightarrow \tilde{c}_{-2,j+1} = -4\tilde{\mu} \frac{(l-2)(l-3)}{\beta_{-2}} \tilde{c}_{-1,j} = 0 \text{ si } l < 2 \quad \tilde{c}_{-1,j} = 0 \text{ et si } 1 < l < 4 \quad (l-2)(l-3) = 0$$

...

$$\text{Si } k = -2j \Rightarrow \tilde{c}_{-2j,j+1} = -\frac{(l-4j+2)(l-4j+1)}{\beta_{-2j}} (4\tilde{\mu} \tilde{c}_{-2j+1,j} + (l-4j+4)(l-4j+3) \tilde{c}_{-2j+2,j}) = 0 \text{ si } l < 4j-2 \quad \tilde{c}_{-2j+1,j} = 0 \text{ et si } 4j-3 < l < 4j \quad (l-4j+2)(l-4j+1) = 0$$

$$\text{Si } k = -2(j+1) \Rightarrow \tilde{c}_{-2(j+1),j+1} = -\frac{(l-4j-2)(l-4j-3)}{\beta_{-2(j+1)}} (4\tilde{\mu} \tilde{c}_{-2j-1,j} + (l-4j-1)(l-4j) \tilde{c}_{-2j,j}) = -4\tilde{\mu} \frac{(l-4j-2)(l-4j-3)}{\beta_{-2(j+1)}} \tilde{c}_{-2j-1,j}$$

$$\tilde{c}_{-2(j+1),j+1} = 0 \text{ si } l = 4j+2 \text{ ou } l = 4j+3 \Rightarrow \tilde{c}_{-2(j+1),j+1} = 0 \text{ pour } l < 4(j+1)$$

La deuxième propriété est donc démontrée.

Cette dernière propriété est fondamentale afin de prouver que le développement ne comporte jamais de fonctions paraboliques cylindriques d'indice négatif. Le développement a donc toujours la forme suivante :

$$y(x) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} C_0 \sum_{k=-\left\lfloor \frac{\nu-\mu}{2} \right\rfloor}^{k=+\infty} \tilde{C}_k D_{l+2k}(x\sqrt{2\gamma})$$

Par le développement en puissance inverse de γ ce résultat est démontré, mais une considération simple permet également de suggérer un tel développement. En effet la condition de finitude à l'infini doit s'appliquer pour la fonction $D_{l+2k}(x\sqrt{2\gamma})$ lorsque γ tend vers l'infini. Or ne serait-ce que pour $D_{-1}(x\sqrt{2\gamma})$ cette condition n'est pas remplie puisque :

$$D_{-1}(\tilde{x}) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{\tilde{x}^2}{4}} \left(1 - \text{Erf}\left(\frac{\tilde{x}}{\sqrt{2}}\right) \right) \Rightarrow D_{-1}(\tilde{x}) \rightarrow \infty \text{ pour } \tilde{x} \rightarrow \infty$$

Or toutes les fonctions paraboliques d'indice négatif se comportent de la même manière.

Développement en série de fonctions de Laguerre des fonctions d'ondes hyper-sphéroïdales aplaties

Les résultats précédents sur la forme limite des solutions suggèrent un développement en fonctions de Laguerre de la forme :

$$y(x) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{k=-l}^{k=+\infty} C_k \left(e^{-\gamma(1-x)} L_{l+k}^{\left(\mu+\lambda-\frac{1}{2}\right)}(2\gamma(1-x)) + (-1)^{(\nu-\mu)} e^{-\gamma(1+x)} L_{l+k}^{\left(\mu+\lambda-\frac{1}{2}\right)}(2\gamma(1+x)) \right) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} (u_1(t_1) + (-1)^{(\nu-\mu)} u_2(t_2))$$

En injectant ce développement dans l'équation des ondes sphéroïdales transformées en variable :

$$\begin{aligned} t(4\gamma-t)u''(t) + \left(2\left(\mu+\lambda-\frac{1}{2}+1\right)(2\gamma-t)-t(4\gamma-t)\right)u'(t) + \left(\omega-\mu(\mu+1+2\lambda-1)-\left(\mu+\lambda-\frac{1}{2}+1\right)(2\gamma-t)\right)u(t) &= 0 \\ \Leftrightarrow 4\gamma\left(tu''(t) + \left(\mu+\lambda-\frac{1}{2}+1-t\right)u'(t)\right) - t^2u''(t) - t\left(2\left(\mu+\lambda-\frac{1}{2}+1\right)-t\right)u'(t) + \left(\omega-\mu(\mu+1+2\lambda-1)-\left(\mu+\lambda-\frac{1}{2}+1\right)(2\gamma-t)\right)u(t) &= 0 \\ \text{Posons } \tilde{\mu} = \mu + \lambda - \frac{1}{2} \quad \mu = \tilde{\mu} + \frac{1}{2} - \lambda \quad \tilde{\omega} = \omega + \lambda^2 - \frac{1}{4} & \\ \Rightarrow 4\gamma(tu''(t) + (\tilde{\mu}+1-t)u'(t)) - t^2u''(t) - t(2(\tilde{\mu}+1)-t)u'(t) + \left(\omega - \left(\tilde{\mu} + \frac{1}{2} - \lambda\right)\left(\tilde{\mu}+1+\lambda-\frac{1}{2}\right) - (\tilde{\mu}+1)(2\gamma-t)\right)u(t) &= 0 \\ \Rightarrow 4\gamma(tu''(t) + (\tilde{\mu}+1-t)u'(t)) - t^2u''(t) - t(2(\tilde{\mu}+1)-t)u'(t) + \left(\omega + \lambda^2 - \frac{1}{4} - \tilde{\mu}(\tilde{\mu}+1) - (\tilde{\mu}+1)(2\gamma-t)\right)u(t) &= 0 \\ \Rightarrow 4\gamma(tu''(t) + (\tilde{\mu}+1-t)u'(t)) - t^2u''(t) - t(2(\tilde{\mu}+1)-t)u'(t) + (\tilde{\omega} - \tilde{\mu}(\tilde{\mu}+1) - (\tilde{\mu}+1)(2\gamma-t))u(t) &= 0 \end{aligned}$$

Il se trouve que cette équation différentielle est exactement celle obtenue lors de l'étude du développement asymptotique des fonctions d'onde sphéroïdales aplaties, avec la substitution de paramètres : $\mu \rightarrow \tilde{\mu}$ $\omega \rightarrow \tilde{\omega}$. On peut donc facilement déterminer une relation de récurrence entre les coefficients C_k . Pour cela on utilise les propriétés des fonctions de Laguerre :

$$\begin{cases} t L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}''(t) + (\tilde{\mu}+1-t) L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}'(t) + (l+k) L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}(t) = 0 \\ t L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}(t) = (2(l+k)+1+\tilde{\mu}) L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}(t) - (l+k+\tilde{\mu}) L_{l+k-1}^{(\tilde{\mu})}(t) - (l+k+1) L_{l+k+1}^{(\tilde{\mu})}(t) \\ t L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}'(t) = (l+k) L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}(t) - (l+k+\tilde{\mu}) L_{l+k-1}^{(\tilde{\mu})}(t) \\ t^2 L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}'''(t) = (l+k+\tilde{\mu})(l+k+\tilde{\mu}-1) L_{l+k-2}^{(\tilde{\mu})}(t) - 2(l+k-1)(l+k+\tilde{\mu}) L_{l+k-1}^{(\tilde{\mu})}(t) + (l+k)(l+k-1) L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}(t) \\ t^2 L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}'(t) = \left\{ (l+k+\tilde{\mu})(l+k+\tilde{\mu}-1) L_{l+k-2}^{(\tilde{\mu})}(t) - (3(l+k)-1+\tilde{\mu})(l+k+\tilde{\mu}) L_{l+k-1}^{(\tilde{\mu})}(t) + \right. \\ \left. + (l+k)(3(l+k)+2\tilde{\mu}+1) L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}(t) - (l+k)(l+k+1) L_{l+k+1}^{(\tilde{\mu})}(t) \right\} \\ t^2 L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}'(t) - t^2 L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}'''(t) = -(l+k+\tilde{\mu})(l+k+\tilde{\mu}) L_{l+k-1}^{(\tilde{\mu})}(t) + 2(l+k)(l+k+\tilde{\mu}+1) L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}(t) - (l+k)(l+k+1) L_{l+k+1}^{(\tilde{\mu})}(t) \end{cases}$$

Ainsi, il vient pour le terme C_k de la série en utilisant les paramètres $\tilde{\mu}, \tilde{\omega}$:

$$\begin{aligned} 4\gamma(t L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}''(t) + (\tilde{\mu}+1-t) L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}'(t)) - t^2 L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}'''(t) - (2(\tilde{\mu}+1)-t) t L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}'(t) + (\tilde{\omega} - \tilde{\mu}(\tilde{\mu}+1) - (\tilde{\mu}+1)(2\gamma-t)) L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}(t) &= 0 \\ \text{Posons } \begin{cases} \alpha_k = (l+k+\tilde{\mu})(l+k) \\ \beta_k = -2(2(l+k)+\tilde{\mu}+1) \\ \chi_k = 2(l+k+\tilde{\omega}+1)(l+k)+1+\tilde{\mu} \end{cases} &\Rightarrow \alpha_{k+1} L_{l+k+1}^{(\tilde{\mu})}(t) - (\tilde{\omega} + \beta_k \gamma + \chi_k) L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}(t) + \alpha_k L_{l+k-1}^{(\tilde{\mu})}(t) = 0 \end{aligned}$$

Puisque le terme de la fonction de Laguerre $L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}(t)$ doit s'annuler, il vient la relation de récurrence à

$$\text{trois termes : } \begin{cases} C_k = 0 & k < -l \\ L_{-l}^{(\tilde{\mu})}(t) \equiv 0 \Rightarrow \alpha_{-l+1} C_{-l+1} - (\tilde{\omega} + \beta_{-l} \gamma + \chi_{-l}) C_{-l} = 0 \\ \alpha_{k+1} C_{k+1} - (\tilde{\omega} + \beta_k \gamma + \chi_k) C_k + \alpha_k C_{k-1} = 0 \end{cases}$$

En introduisant le paramètre τ , il vient :

$$\tau = 2l + 1 + \tilde{\mu} \Leftrightarrow l = \frac{\tau - 1 - \tilde{\mu}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_k = \frac{(\tau + 2k - 1 + \tilde{\mu})(\tau + 2k - 1 - \tilde{\mu})}{4} \\ \beta_k = -2(\tau + 2k) \\ \chi_k = \frac{(\tau + 2k + \tilde{\mu} + 1)(\tau + 2k - 1 - \tilde{\mu})}{2} + \tilde{\mu} + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_k = 0 & k < -l \\ \alpha_{-l+1} C_{-l+1} - (\tilde{\omega} + \beta_{-l} \gamma + \chi_{-l}) C_{-l} = 0 \\ \alpha_{k+1} C_{k+1} - (\tilde{\omega} + \beta_k \gamma + \chi_k) C_k + \alpha_k C_{k-1} = 0 \end{cases}$$

Tout comme pour les fonctions d'ondes sphéroïdales allongées, la première conséquence de l'existence de cette récurrence est que l'on peut appliquer une méthode matricielle pour déterminer, lorsque γ est suffisamment grand, et que l'on prend suffisamment de termes du développement, une valeur approchée de la valeur caractéristique λ et une valeur approchée de la fonction d'onde sphéroïdale de première espèce par exemple.

Mais là encore pour l'instant je laisse ce point de côté, essentiellement numérique, afin de déterminer tout d'abord les premiers termes de développement en puissance de $1/\gamma$. Pour cela supposons que la valeur caractéristique λ et les coefficients C_k se développent comme suit :

$$\begin{cases} \tilde{\omega} = \sum_{j=-2}^{j=+\infty} \Gamma_j \gamma^{-j} \\ C_k = \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_{k,j} \gamma^{-j} \end{cases} \quad \text{sachant que} \quad \begin{cases} C_0 = c_{0,0} \Rightarrow c_{0,j} = 0 \quad j > 0 \\ C_k = \sum_{j=1}^{j=+\infty} c_{k,j} \gamma^{-j} \quad k \neq 0 \Rightarrow c_{k,0} = 0 \quad k \neq 0 \quad \text{ou} \quad k < -j \end{cases}$$

Et injectons ces développements dans la récurrence à 3 termes pour d'abord déterminer les deux premiers termes en γ^2 et γ du développement de λ :

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1} C_{k+1} - (\lambda + \beta_k \gamma + \chi_k) C_k + \alpha_k C_{k-1} &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha_{k+1} \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_{k+1,j} \gamma^{-j} - \left(\sum_{j=-2}^{j=+\infty} \Gamma_j \gamma^{-j} + \beta_k \gamma + \chi_k \right) \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_{k,j} \gamma^{-j} + \alpha_k \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_{k-1,j} \gamma^{-j} &= 0 \\ \text{Terme en } \gamma^2 \rightarrow \Gamma_{-2} &= 0 \\ \text{Terme en } \gamma \rightarrow -(\beta_0 + \Gamma_{-1}) \gamma c_{k,0} = 0 \Rightarrow \Gamma_{-1} = -b_0 = 2\tau \end{aligned}$$

Voyons maintenant le terme en $1/\gamma^j$ pour $j=0,1,\dots$

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1} \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_{k+1,j} \gamma^{-j} - \left(\sum_{j=-2}^{j=+\infty} \Gamma_j \gamma^{-j} + \beta_k \gamma + \chi_k \right) \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_{k,j} \gamma^{-j} + \alpha_k \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_{k-1,j} \gamma^{-j} &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha_{k+1} \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_{k+1,j} \gamma^{-j} - \left(\sum_{i=0}^{i=+\infty} \sum_{j=0}^{j=+\infty} \Gamma_j c_{k,i} \gamma^{-i-j} + (\Gamma_{-1} + \beta_k) \gamma \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_{k,j} \gamma^{-j} + \chi_k \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_{k,j} \gamma^{-j} \right) + \alpha_k \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_{k-1,j} \gamma^{-j} &= 0 \\ \text{Comme } \sum_{i=0}^{i=+\infty} \sum_{j=0}^{j=+\infty} \Gamma_j c_{k,i} \gamma^{-i-j} = \sum_{j=0}^{j=+\infty} \gamma^{-j} \sum_{i=0}^{i=j} \Gamma_i c_{k,j-i} \quad \text{et} \quad \Gamma_{-1} + \beta_k = -2(\tau + 2k) + 2\tau = -4k & \\ \Leftrightarrow \alpha_{k+1} \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_{k+1,j} \gamma^{-j} - \left(\sum_{j=0}^{j=+\infty} \gamma^{-j} \sum_{i=0}^{i=j} \Gamma_i c_{k,j-i} - 4k \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_{k,j+1} \gamma^{-j} + \chi_k \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_{k,j} \gamma^{-j} \right) + \alpha_k \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_{k-1,j} \gamma^{-j} &= 0 \\ \text{Terme en } \gamma^{-j} \Rightarrow \alpha_{k+1} c_{k+1,j} + \alpha_k c_{k-1,j} - \chi_k c_{k,j} + 4k c_{k,j+1} - \sum_{i=0}^{i=j} \Gamma_i c_{k,j-i} &= 0 \\ \Rightarrow c_{k,j+1} = \frac{-\alpha_k c_{k-1,j} + \chi_k c_{k,j} - \alpha_{k+1} c_{k+1,j} + \sum_{i=0}^{i=j} \Gamma_i c_{k,j-i}}{4k} = \frac{-\alpha_k c_{k-1,j} + \chi_k c_{k,j} - \alpha_{k+1} c_{k+1,j} + \sum_{i=0}^{i=j-1} \Gamma_i c_{k,j-i}}{4k} \quad k > 0 & \\ \text{Terme } k=0 \rightarrow \alpha_1 c_{1,j} + \alpha_0 c_{-1,j} - \chi_0 c_{0,j} - \Gamma_j c_{0,0} = 0 \Rightarrow \Gamma_j = -\chi_0 \frac{c_{0,j}}{c_{0,0}} + \alpha_0 \frac{c_{-1,j}}{c_{0,0}} + \alpha_1 \frac{c_{1,j}}{c_{0,0}} & \end{aligned}$$

Cela représente donc un système de deux relations de récurrence combinées, et si l'on normalise tous les coefficients c par le rapport : $c_{n,m}/c_{0,0}$, alors il vient :

$$\begin{cases} \alpha_k = \frac{(\tau+2k-1+\tilde{\mu})(\tau+2k-1-\tilde{\mu})}{4} \\ \beta_k = -2(\tau+2k) \\ \chi_k = \frac{(\tau+2k+\tilde{\mu}+1)(\tau+2k-1-\tilde{\mu})}{2} + \tilde{\mu}+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_k = (l+k+\tilde{\mu})(l+k) \\ \beta_k = -2(2l+k+\tilde{\mu}+1) \\ \chi_k = 2(l+k+\tilde{\mu}+1)(l+k)+1+\tilde{\mu} \Rightarrow \chi_k - \chi_0 = 2k(2l+k+\tilde{\mu}+1) \end{cases}$$

$$\tilde{c}_{n,m} = \frac{c_{n,m}}{c_{0,0}} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{c}_{0,0} = 1 & \tilde{c}_{0,l} = 0 \quad l > 0 & \tilde{c}_{k,0} = 0 \quad k \neq 0 \\ \tilde{c}_{k,j+1} = \frac{-\alpha_k \tilde{c}_{k-1,j} + \chi_k \tilde{c}_{k,j} - \alpha_{k+1} \tilde{c}_{k+1,j} + \sum_{i=0}^{j-1} \Gamma_i \tilde{c}_{k,j-i} - \alpha_k \tilde{c}_{k-1,j} + (\chi_k - \chi_0) \tilde{c}_{k,j} - \alpha_{k+1} \tilde{c}_{k+1,j} + \sum_{i=1}^{j-1} \Gamma_i \tilde{c}_{k,j-i}}{4k} = \frac{-\alpha_k \tilde{c}_{k-1,j} + (\chi_k - \chi_0) \tilde{c}_{k,j} - \alpha_{k+1} \tilde{c}_{k+1,j} + \sum_{i=1}^{j-1} \Gamma_i \tilde{c}_{k,j-i}}{4k} & k > 0 \\ \Gamma_{-2} = 0 & \Gamma_{-1} = 2\tau = -\beta_0 & \Gamma_0 = -\chi_0 = \frac{(\tau+\tilde{\mu}+1)(\tau-1-\tilde{\mu})}{2} + \tilde{\mu}+1 = -2l(l+\tilde{\mu}+1)+1+\tilde{\mu} \\ \Gamma_j = \alpha_0 \tilde{c}_{-1,j} + \alpha_1 \tilde{c}_{1,j} & l > 0 \end{cases}$$

J'ai vérifié cet algorithme de récurrence d'après le programme Mathematica élaboré par P.Falloon et j'ai retrouvé exactement les valeurs données par NIST Handbook of Mathematical Functions, 30.9 Asymptotic Approximations and Expansions, Formules 30.9.4, 30.9.5 et 30.9.6, mais avec les nouveaux paramètres $\tilde{\mu}, \tilde{\omega}$:

$$\begin{aligned} \tau = v \quad v - \mu \text{ pair} \quad \tau = v + 1 \quad v - \mu \text{ impair} \quad \tilde{\mu} = \mu + \lambda - \frac{1}{2} \quad \tilde{\omega} = \omega + \lambda^2 - \frac{1}{4} \\ \tilde{\omega} \approx \Gamma_{-1} \gamma + \Gamma_0 + \frac{\Gamma_1}{\gamma} + \frac{\Gamma_2}{\gamma^2} + \frac{\Gamma_3}{\gamma^3} + \frac{\Gamma_4}{\gamma^4} + \frac{\Gamma_5}{\gamma^5} \Rightarrow \omega \approx \Gamma_{-1} \gamma + \left(\Gamma_0 + \frac{1}{4} - \lambda^2 \right) + \frac{\Gamma_1}{\gamma} + \frac{\Gamma_2}{\gamma^2} + \frac{\Gamma_3}{\gamma^3} + \frac{\Gamma_4}{\gamma^4} + \frac{\Gamma_5}{\gamma^5} \\ \Gamma_{-1} = 2\tau \quad 2\Gamma_0 = -(1+\tau^2) + \mu^2 \quad 8\Gamma_1 = -\tau((1+\tau^2) + \tilde{\mu}^2) \\ 2^6 \Gamma_2 = -5\tau^4 - 10\tau^2 - 1 + 2\tilde{\mu}^2(1+3\tau^2) - \tilde{\mu}^4 \\ 2^9 \Gamma_3 = -\tau(33\tau^4 + 114\tau^2 + 37 - 2\tilde{\mu}^2(25+23\tau^2) + 13\tilde{\mu}^4) \\ 2^{10} \Gamma_4 = -63\tau^6 - 340\tau^4 - 239\tau^2 - 14 + 10\tilde{\mu}^2(10\tau^4 + 23\tau^2 + 3) - 3\tilde{\mu}^4(6+13\tau^2) + 2\tilde{\mu}^6 \\ 2^{13} \Gamma_5 = -\tau(527\tau^6 + 4139\tau^4 + 5221\tau^2 + 1009 - \tilde{\mu}^2(939\tau^4 + 3750\tau^2 + 1591) + 5\tilde{\mu}^4(93\tau^2 + 127) - 53\tilde{\mu}^6) \end{aligned}$$

Application de la méthode matricielle pour l'estimation asymptotique des fonctions d'onde hyper-sphéroïdales allongées et aplaties dans le cas d'une sphéroïdité γ très grande

Le fait que l'on puisse envisager des développements asymptotiques pour les fonctions d'onde hyper-sphéroïdales allongées de la forme :

$$Asymptote_hps_v^{\lambda,\mu}(x) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{k=-\lfloor \frac{l}{2} \rfloor}^{k=+\infty} C_k D_{l+2k}(x\sqrt{2\gamma}) \quad l = v - \mu \quad \text{et} \quad v, \mu \in \mathbf{N}$$

ou de la forme suivante pour les fonctions d'onde sphéroïdales aplaties :

$$Asymptote_hps_v^{\lambda,\mu}(x) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{k=-l}^{k=+\infty} C_k \left(e^{-\gamma(1-x)} L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}(2\gamma(1-x)) + (-1)^{(v-\mu)} e^{-\gamma(1+x)} L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}(2\gamma(1+x)) \right)$$

$$l = \begin{cases} \frac{v-\mu}{2} & v-\mu \quad \text{pair} \\ \frac{v-\mu-1}{2} & v-\mu \quad \text{impair} \end{cases} \quad \text{et} \quad v, \mu \in \mathbf{N} \quad \text{et} \quad \tilde{\mu} = \mu + \lambda - \frac{1}{2}$$

et que ces deux types de développement aboutissent à des relations de récurrence sur les coefficients de ces derniers, nous permet de formaliser la recherche de la valeur caractéristique ω et des coefficients du développement comme un problème de recherche des valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice tri-diagonale ou penta-diagonale de taille infinie. La simulation consiste alors à partir d'une taille finie suffisamment grande, de calculer et de classer les valeurs propres dans un ordre croissant (ordre défini sur des valeurs propres réelles ou imaginaire), puis d'augmenter progressivement la taille de la matrice pour atteindre le degré de précision souhaité sur chaque valeur propre ainsi obtenue. Les vecteurs propres donnent directement les coefficients du développement.

Fonctions d'onde hyper-sphéroïdales allongées : commençons par la méthode matricielle pour la récurrence à cinq termes des coefficients du développement en fonctions paraboliques cylindriques :

$$\left(C_{k-2} - 4\tilde{\mu} C_{k-1} - (4\tilde{\omega} + 4\gamma^2 - 4\tilde{\mu}^2 + 3 + 2(l+2k)^2 + 2(l+2k) - 4\gamma(2(l+2k)+1)) C_k + (4\tilde{\mu}(l+2k+2)(l+2k+1) C_{k+1} + (l+2k+4)(l+2k+3)(l+2k+2)(l+2k+1) C_{k+2}) \right) = 0$$

$$\text{Pour } k = \pm 1, k = \pm 2, k = \pm 3, \dots \quad \tilde{\mu} = \mu + \lambda - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_k C_{k-2} + \beta_k C_{k-1} + (\gamma_k - \tilde{\omega}) C_k + \delta_k C_{k+1} + \varepsilon_k C_{k+2} = 0 \\ \alpha_k = \frac{1}{4} \\ \beta_k = -\tilde{\mu} \\ \gamma_k = -\frac{4\gamma^2 - 4\gamma(2(l+2k)+1) - 4\tilde{\mu}^2 + 3 + 2(l+2k)^2 + 2(l+2k)}{4} \\ \delta_k = \tilde{\mu}(l+2k+2)(l+2k+1) \\ \varepsilon_k = \frac{(l+2k+4)(l+2k+3)(l+2k+2)(l+2k+1)}{4} \end{cases}$$

La recherche de valeurs et vecteurs propres se développent sur une matrice de la forme :

$$(\mathbf{M}_\infty - \tilde{\omega} \mathbf{I}_\infty) \mathbf{X}_\infty = 0 \quad \mathbf{M}_\infty = \begin{bmatrix} \gamma_{\lfloor \frac{v-\mu}{2} \rfloor} & \delta_{\lfloor \frac{v-\mu}{2} \rfloor} & \varepsilon_{\lfloor \frac{v-\mu}{2} \rfloor} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{1-\lfloor \frac{v-\mu}{2} \rfloor} & \gamma_{1-\lfloor \frac{v-\mu}{2} \rfloor} & \delta_{1-\lfloor \frac{v-\mu}{2} \rfloor} & \varepsilon_{1-\lfloor \frac{v-\mu}{2} \rfloor} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{2-\lfloor \frac{v-\mu}{2} \rfloor} & \beta_{2-\lfloor \frac{v-\mu}{2} \rfloor} & \gamma_{2-\lfloor \frac{v-\mu}{2} \rfloor} & \delta_{2-\lfloor \frac{v-\mu}{2} \rfloor} & \varepsilon_{2-\lfloor \frac{v-\mu}{2} \rfloor} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \alpha_{-1} & \beta_{-1} & \gamma_{-1} & \delta_{-1} & \varepsilon_{-1} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 & \delta_0 & \varepsilon_0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 & \varepsilon_1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \alpha_k & \beta_k & \gamma_k & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_\infty = \begin{bmatrix} C_{\lfloor \frac{v-\mu}{2} \rfloor}, \dots, C_{-1}, C_0, C_1, \dots, C_k, \dots \end{bmatrix}^T \quad C_k \text{ vecteurs propres de } \mathbf{M}_\infty$$

L'algorithme est simple pour des valeurs v, μ entières :

- prendre une matrice de taille $(-\lfloor \frac{v-\mu}{2} \rfloor + M + 1, -\lfloor \frac{v-\mu}{2} \rfloor + M + 1)$ pour M suffisamment grand dont les indices varient de $-\lfloor \frac{v-\mu}{2} \rfloor$ à $+M$
- calculer toutes les valeurs propres, sélectionner les seules valeurs réelles et les ordonner par valeurs croissantes, puis adjoindre les valeurs propres imaginaires non triées en première position
- pour déterminer la valeur propre à sélectionner, on recherche celle dont la distance est minimale avec une approximation de la valeur propre λ lorsque γ grand (voir le développement en puissance inverse de γ)
- calculer le vecteur propre de la matrice correspondant à la valeur propre sélectionnée, alors les coefficients du vecteur propre, à une normalisation près sont ceux du développement recherché.

Fonctions d'onde hyper-sphéroïdales aplaties: c'est une démarche similaire que nous appliquons à la récurrence à 3 termes des coefficients du développement en fonctions de Laguerre :

$$\begin{cases} \alpha_k = (l+k+\tilde{\mu})(l+k) \\ \beta_k = -2(2(l+k)+\tilde{\mu}+1) \\ \chi_k = 2(l+k+\mu+1)(l+k)+1+\tilde{\mu} \end{cases} \Leftrightarrow \tau = 2l+1+\tilde{\mu} \Leftrightarrow l = \frac{\tau-1-\tilde{\mu}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_k = \frac{(\tau+2k-1+\tilde{\mu})(\tau+2k-1-\tilde{\mu})}{4} \\ \beta_k = -2(\tau+2k) \\ \chi_k = \frac{(\tau+2k+\tilde{\mu}+1)(\tau+2k-1-\tilde{\mu})}{2} + \tilde{\mu}+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_k = 0 & k < -l \\ (-\beta_{-l}\gamma + \chi_{-l}) - \tilde{\omega}) C_{-l} + \alpha_{-l+1} C_{-l+1} = 0 \\ \alpha_k C_{k-1} + (-\beta_k\gamma + \chi_k) - \tilde{\omega}) C_k + \alpha_{k+1} C_{k+1} = 0 \end{cases} \quad \tilde{\mu} = \mu + \lambda - \frac{1}{2}$$

La recherche de valeurs et vecteurs propres se développent sur une matrice de la forme :

$$\mathbf{M}_\infty = \begin{bmatrix} -(\beta_{-l}\gamma + \chi_{-l}) & \alpha_{-l+1} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \alpha_{-l+1} & -(\beta_{-l+1}\gamma + \chi_{-l+1}) & \alpha_{-l+2} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \alpha_{-1} & -(\beta_{-1}\gamma + \chi_{-1}) & \alpha_0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \alpha_0 & -(\beta_0\gamma + \chi_0) & \alpha_1 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \alpha_1 & -(\beta_1\gamma + \chi_1) & \alpha_2 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \alpha_l & -(\beta_l\gamma + \chi_l) & \alpha_{l+1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{M}_\infty - \tilde{\omega} \mathbf{I}_\infty) \mathbf{X}_\infty = 0 \quad \mathbf{X}_\infty = [C_{-l}, \dots, C_{-1}, C_0, C_1, \dots, C_k, \dots]^T \quad C_k \text{ vecteurs propres de } \mathbf{M}_\infty$$

L'algorithme est simple pour des valeurs v, μ entières :

- prendre une matrice de taille $(l+M+1, l+M+1)$ pour M suffisamment grand dont les indices varient de $-l$ à $+M$
- calculer toutes les valeurs propres, sélectionner les seules valeurs réelles et les ordonner par valeurs croissantes, puis adjoindre les valeurs propres imaginaires non triées en première position
- pour déterminer la valeur propre à sélectionner, on recherche celle dont la distance est minimale avec une approximation de la valeur propre λ lorsque γ grand (voir le développement en puissance inverse de γ)
- calculer le vecteur propre de la matrice correspondant à la valeur propre sélectionnée, alors les coefficients du vecteur propre, à une normalisation près sont ceux du développement recherché.

Commentaire sur la résolution numérique : l'implémentation sous Mathematica est assez simple, il convient pour autant de ne pas choisir une valeur M trop importante, car dans ce cas il y a une certaine instabilité dans l'estimation des fonctions de base (paraboliques cylindriques ou Laguerre). Lorsqu'à l'inverse M est faible alors les approximations auront tendance à reproduire les développements des valeurs caractéristiques et des coefficients du développement en puissance inverse de γ . Il se trouve que les développements ne sont valables que lorsque γ est suffisamment important, par exemple $\gamma > 25$. Le choix de la valeur de M est donc médian, ni trop petit, ni trop grand. Je donnerais à ce propos deux exemples de graphe dans le cas des ondes sphéroïdales allongées et aplaties, en les comparant avec les constructions numériques des mêmes fonctions hyper-sphéroïdales à l'aide des fonctions de Gegenbauer associées.

Une fois les coefficients du développement estimés numériquement, il convient d'établir les valeurs des dérivées premières et secondes des fonctions asymptotes :

$$\begin{cases}
 u(x, \gamma^2) = \sum_{k=-\left\lfloor \frac{\nu-\mu}{2} \right\rfloor}^{k=+\infty} C_k D_{l+2k}(x\sqrt{2\gamma}) \\
 v(x, \gamma^2) = \sum_{k=-l}^{k=+\infty} C_k \left(e^{-\gamma(1-x)} L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}(2\gamma(1-x)) + (-1)^{(\nu-\mu)} e^{-\gamma(1+x)} L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}(2\gamma(1+x)) \right) \\
 u'(x, \gamma^2) = \sum_{k=-\left\lfloor \frac{\nu-\mu}{2} \right\rfloor}^{k=+\infty} C_k \left(x \gamma D_{l+2k}(x\sqrt{2\gamma}) - \sqrt{2\gamma} D_{l+2k+1}(x\sqrt{2\gamma}) \right) \\
 v'(x, \gamma^2) = \sum_{k=-l}^{k=+\infty} C_k \left(2\gamma e^{-\gamma(1-x)} L_{l+k-1}^{(\tilde{\mu}+1)}(2\gamma(1-x)) - 2\gamma (-1)^{(\nu-\mu)} e^{-\gamma(1+x)} L_{l+k-1}^{(\tilde{\mu}+1)}(2\gamma(1+x)) + \right. \\
 \left. + \gamma e^{-\gamma(1-x)} L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}(2\gamma(1-x)) - \gamma (-1)^{(\nu-\mu)} e^{-\gamma(1+x)} L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}(2\gamma(1+x)) \right) \\
 u''(x, \gamma^2) = \sum_{k=-\left\lfloor \frac{\nu-\mu}{2} \right\rfloor}^{k=+\infty} C_k \left(\gamma (1+\gamma x^2) D_{l+2k}(x\sqrt{2\gamma}) - 2x\sqrt{2\gamma}^{\frac{3}{2}} D_{l+2k+1}(x\sqrt{2\gamma}) + 2\gamma D_{l+2k+2}(x\sqrt{2\gamma}) \right) \\
 v''(x, \gamma^2) = \sum_{k=-l}^{k=+\infty} C_k \left(4\gamma^2 e^{-\gamma(1-x)} L_{l+k-2}^{(\tilde{\mu}+2)}(2\gamma(1-x)) + 4\gamma^2 (-1)^{(\nu-\mu)} e^{-\gamma(1+x)} L_{l+k-2}^{(\tilde{\mu}+2)}(2\gamma(1+x)) + \right. \\
 \left. + 4\gamma^2 e^{-\gamma(1-x)} L_{l+k-1}^{(\tilde{\mu}+1)}(2\gamma(1-x)) + 4\gamma^2 (-1)^{(\nu-\mu)} e^{-\gamma(1+x)} L_{l+k-1}^{(\tilde{\mu}+1)}(2\gamma(1+x)) + \right. \\
 \left. + \gamma^2 e^{-\gamma(1-x)} L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}(2\gamma(1-x)) + \gamma^2 (-1)^{(\nu-\mu)} e^{-\gamma(1+x)} L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}(2\gamma(1+x)) \right) \\
 Asymptote_hps_v^\mu(x, \gamma^2) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} u(x, \gamma^2) \\
 Asymptote_hps_v^\mu(x, -\gamma^2) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} v(x, \gamma^2) \\
 Asymptote_hps_v^{\mu'}(x, \gamma^2) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} u'(x, \gamma^2) - \mu x (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}-1} u(x, \gamma^2) \\
 Asymptote_hps_v^{\mu'}(x, -\gamma^2) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} v'(x, \gamma^2) - \mu x (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}-1} v(x, \gamma^2) \\
 Asymptote_hps_v^{\mu''}(x, \gamma^2) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} u''(x, \gamma^2) - 2\mu x (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}-1} u'(x, \gamma^2) - \mu (1+x^2(1-\mu))(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}-2} u(x, \gamma^2) \\
 Asymptote_hps_v^{\mu''}(x, -\gamma^2) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} v''(x, \gamma^2) - 2\mu x (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}-1} v'(x, \gamma^2) - \mu (1+x^2(1-\mu))(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}-2} v(x, \gamma^2)
 \end{cases}$$

Illustrons ces deux développements par quelques exemples

Dans ce qui suit j'ai comparé les deux développements avec des fonctions de bases asymptotes soit avec le développement construit à l'aide des fonctions de Gegenbauer, soit avec le développement en fonctions de Gegenbauer associées:

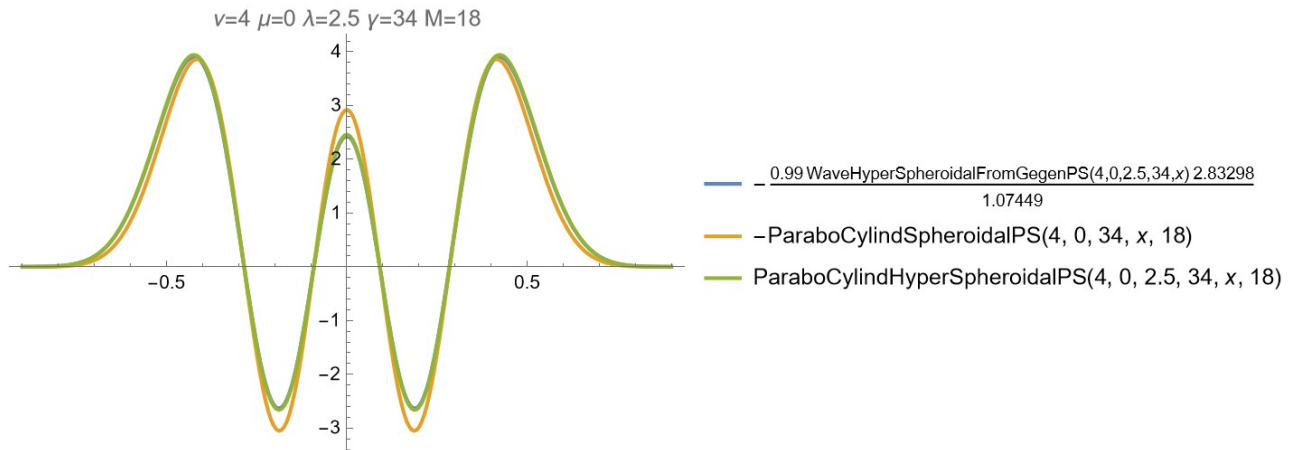
$$hps_v^{\lambda,\mu}(x,\gamma^2) = (1-x^2)^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_{v,k}^{\lambda,\mu}(\gamma^2) C_{v+2k}^{1-\lambda-\mu}(x) \text{ ou } hps_v^{\lambda,\mu}(x,\gamma^2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k d_{v,k}^{\lambda,\mu}(\gamma^2) C_{v+2k}^{\lambda,\mu}(x)$$

$$Asymptote_hps_v^{\lambda,\mu}(x) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{k=-\lfloor \frac{l}{2} \rfloor}^{k=+\infty} C_k D_{l+2k}(x\sqrt{2\gamma}) \quad l = v - \mu \quad \text{et} \quad v, \mu \in \mathbb{N}$$

$$Asymptote_hps_v^{\lambda,\mu}(x) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{k=l}^{k=+\infty} C_k \left(e^{-\gamma(1-x)} L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}(2\gamma(1-x)) + (-1)^{(v-\mu)} e^{-\gamma(1+x)} L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}(2\gamma(1+x)) \right)$$

$$l = \frac{v-\mu}{2} \quad \text{pour } v-\mu \text{ pair} \quad l = \frac{v-\mu-1}{2} \quad \text{pour } v-\mu \text{ impair} \quad \text{et} \quad v, \mu \in \mathbb{N} \quad \tilde{\mu} = \mu + \lambda - \frac{1}{2}$$

Voici les graphes comparés d'une fonction d'onde hyper-sphéroïdales allongées et ses divers développements pour les valeurs indiquées des paramètres, ainsi que la fonction sphéroïdales de référence qui est calculé avec $\lambda=1/2$:

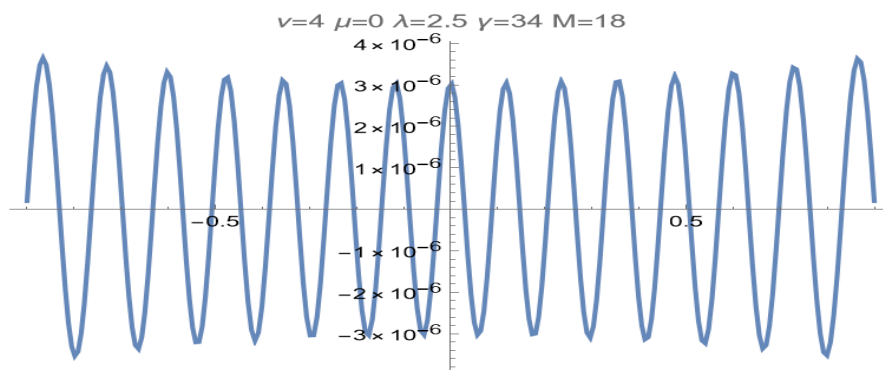


Dans ce cas les deux facteurs d'échelle pour réaliser la comparaison des deux fonctions sont:

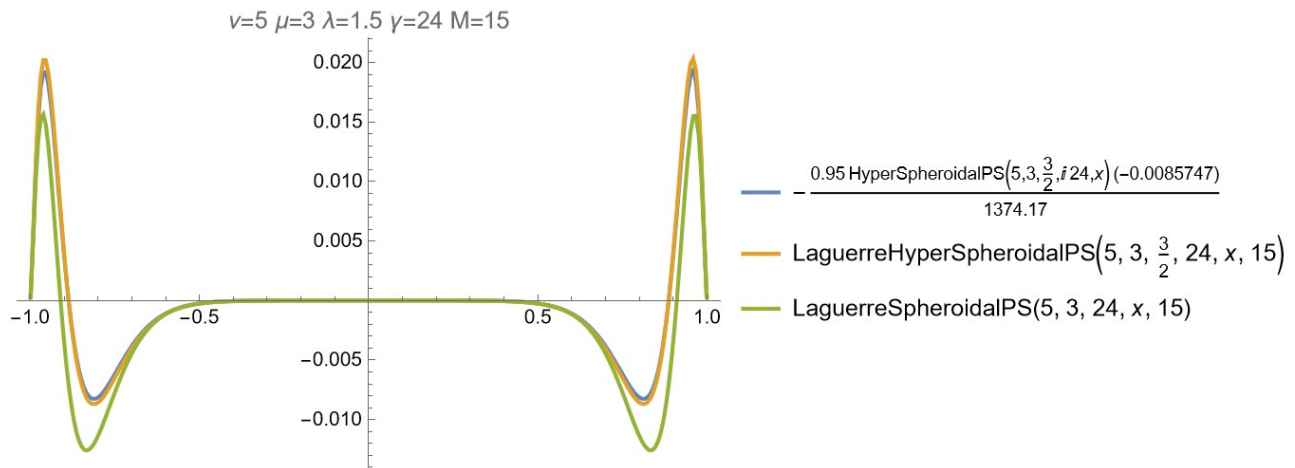
$$scale1 = hps_v^{\lambda,\mu}(0.5) \quad \text{développement en fonctions de Gegenbauer}$$

$$scale2 = Asymptote_hps_v^{\lambda,\mu}(0.5) \quad \text{développement en fonctions paraboliques cylindrique}$$

Lorsque qu'avec le calcul des dérivées premières et secondes on reproduit l'équation différentielle des ondes hyper-sphéroïdales on obtient la forme du graphe suivant avec les paramètres indiqués :



Les graphes illustratifs d'une fonction d'onde sphéroïdales aplaties, pour les valeurs indiquées des paramètres :

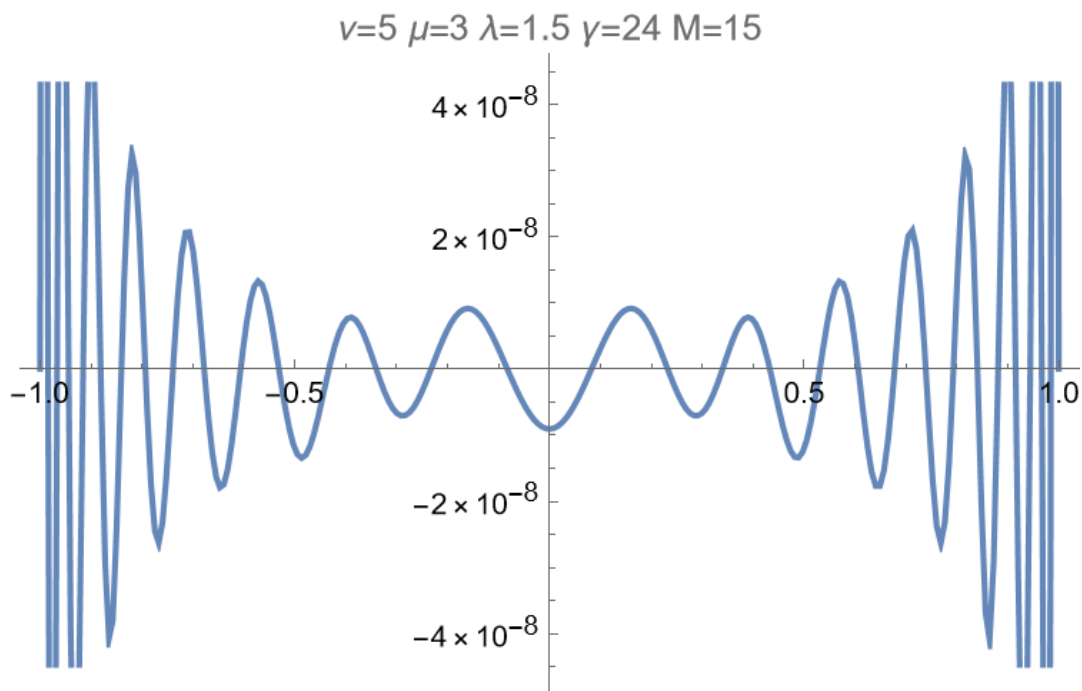


Dans ce cas les deux facteurs d'échelle pour réaliser la comparaison des deux fonctions sont:

$scale1 = hps_{\nu}^{\lambda, \mu}(0.8)$ développement en fonctions de Gegenbauer associées

$scale2 = Asymptote_hps_{\nu}^{\lambda, \mu}(0.8)$ développement en fonctions généralisées de Laguerre

Lorsque qu'avec le calcul des dérivées premières et secondes on reproduit l'équation différentielle des ondes hyper-sphéroïdales aplaties on obtient la forme du graphe suivant avec les paramètres indiqués,



Dans les graphes précédents pour comparer les deux fonctions j'ai calculé numériquement les deux facteurs d'échelle nécessaires, mais cela se rapporte in fine à la question de la normalisation des fonctions définies par leur développement asymptotique. Il convient donc d'aborder la question de la normalisation des fonctions asymptotes.

Normalisation des fonctions hyper-sphéroïdales asymptotes développées en fonctions paraboliques cylindriques ou fonctions de Laguerre

Il convient effectivement d'imposer une normalisation aux fonctions asymptotes afin qu'elles suivent celles imposées aux fonctions hyper-sphéroïdales tant la normalisation de Meixner & Schafke, de Flammer ou celle de Chu & Stratton.

Cas des fonctions d'ondes sphéroïdales allongées (fonctions paraboliques cylindriques)

La formule asymptotique s'écrit :

$$\text{Asymptote_hps}_\nu^\mu(x) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{k=-\left[\frac{\nu-\mu}{2}\right]}^{k=+\infty} C_k D_{l+2k}(x\sqrt{2\gamma}) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} C_0 \sum_{k=-\left[\frac{\nu-\mu}{2}\right]}^{k=+\infty} \tilde{C}_k D_{l+2k}(x\sqrt{2\gamma})$$

Avec $\tilde{C}_k = \frac{C_k}{C_0}$ $l = \nu - \mu$ et $\nu, \mu \in \mathbb{N}$

Ce développement lorsqu'il est décliné par puissance inverse de γ peut être directement calculé à l'aide de formules de récurrence et revêt la forme suivante :

$$\text{Asymptote_hps}_\nu^\mu(x, \gamma^2) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} C_0 \sum_{j=0}^{j=+\infty} \gamma^{-j} \sum_{i=\text{Max}\left(-\left[\frac{\nu-\mu}{2}\right], -2j\right)}^{i=2j} \tilde{c}_{i,j} D_{l+2i}(x\sqrt{2\gamma})$$

Le rapprochement des deux expressions nous donne la forme du développement formel en puissance inverse de γ des coefficients \tilde{C}_k :

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\left[\frac{\nu-\mu}{2}\right]}^{k=+\infty} \tilde{C}_k D_{l+2k}(x\sqrt{2\gamma}) &= \sum_{j=0}^{j=+\infty} \gamma^{-j} \sum_{i=-2j}^{i=2j} \tilde{c}_{i,j} D_{l+2i}(x\sqrt{2\gamma}) \\ \begin{cases} \chi_{i,j} = 0 & \text{si } |i| > 2j \\ \chi_{i,j} = 1 & \text{si } |i| \leq 2j \end{cases} \Rightarrow \sum_{k=-\left[\frac{\nu-\mu}{2}\right]}^{k=+\infty} \tilde{C}_k D_{l+2k}(x\sqrt{2\gamma}) &= \sum_{i=-\left[\frac{\nu-\mu}{2}\right]}^{i=+\infty} \left(\sum_{j=0}^{j=+\infty} \gamma^{-j} \tilde{c}_{i,j} \chi_{i,j} \right) D_{l+2i}(x\sqrt{2\gamma}) \\ \Rightarrow \tilde{C}_k &= \sum_{j=0}^{j=+\infty} \gamma^{-j} \tilde{c}_{k,j} \chi_{k,j} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \chi_{k,j} = 0 & \text{si } |k| > 2j \\ \chi_{k,j} = 1 & \text{si } |k| \leq 2j \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} \tilde{C}_0 = 1 \\ \tilde{C}_1 = \sum_{j=1}^{j=+\infty} \gamma^{-j} \tilde{c}_{1,j} \\ \tilde{C}_3 = \sum_{j=2}^{j=+\infty} \gamma^{-j} \tilde{c}_{3,j} \\ \dots \end{cases} & \quad \begin{cases} \tilde{C}_{-1} = \sum_{j=1}^{j=+\infty} \gamma^{-j} \tilde{c}_{-1,j} \\ \tilde{C}_{-3} = \sum_{j=2}^{j=+\infty} \gamma^{-j} \tilde{c}_{-3,j} \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{C}_2 = \sum_{j=1}^{j=+\infty} \gamma^{-j} \tilde{c}_{2,j} \\ \tilde{C}_4 = \sum_{j=2}^{j=+\infty} \gamma^{-j} \tilde{c}_{4,j} \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{C}_{-2} = \sum_{j=1}^{j=+\infty} \gamma^{-j} \tilde{c}_{-2,j} \\ \tilde{C}_{-4} = \sum_{j=2}^{j=+\infty} \gamma^{-j} \tilde{c}_{-4,j} \end{cases} \end{aligned}$$

Si l'on impose la normalisation de Meixner & Schafke :

$$\int_{-1}^{+1} dx (1-x^2)^{\frac{2\lambda-1}{2}} (hps_v^{\lambda,\mu}(x, \gamma^2))^2 = \int_{-1}^{+1} dx (Asymptote_hps_v^{\lambda,\mu}(x, \gamma^2))^2 = 2^{1-2\lambda} \frac{2}{2\lambda+2\nu} \frac{\pi}{(\Gamma(\lambda))^2} \frac{\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}$$

Il vient une contrainte de la forme :

$$\int_{-1}^{+1} dx (1-x^2)^{\frac{2\lambda-1}{2}} (Asymptote_hps_v^{\lambda,\mu}(x, \gamma^2))^2 = (C_0)^2 \int_{-1}^{+1} dx (1-x^2)^{\mu+\frac{2\lambda-1}{2}} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{C}_k D_{l+2k}(x\sqrt{2\gamma}) \right)^2 = 2^{1-2\lambda} \frac{2}{2\lambda+2\nu} \frac{\pi}{(\Gamma(\lambda))^2} \frac{\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}$$

$$u(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{C}_k D_{l+2k}(x) \Rightarrow (C_0)^2 \int_{-1}^{+1} dx (1-x^2)^{\mu+\frac{2\lambda-1}{2}} (u(x\sqrt{2\gamma}))^2 = 2^{1-2\lambda} \frac{2}{2\lambda+2\nu} \frac{\pi}{(\Gamma(\lambda))^2} \frac{\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}$$

En posant :

$$\text{Puis } \tilde{x} = x\sqrt{2\gamma} \Rightarrow \frac{(C_0)^2}{2\gamma} \int_{-\sqrt{2\gamma}}^{+\sqrt{2\gamma}} d\tilde{x} \left(1 - \frac{\tilde{x}^2}{2\gamma}\right)^{\mu+\frac{2\lambda-1}{2}} (u(\tilde{x}))^2 = 2^{1-2\lambda} \frac{2}{2\lambda+2\nu} \frac{\pi}{(\Gamma(\lambda))^2} \frac{\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}$$

Concernant les fonctions paraboliques l'auteur R.Sips fait l'hypothèse que l'intégrale est étendue à + et -∞, soit : $\frac{(C_0)^2}{2\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x} \left(1 - \frac{\tilde{x}^2}{2\gamma}\right)^{\mu+\frac{2\lambda-1}{2}} (u(\tilde{x}))^2 = 2^{1-2\lambda} \frac{2}{2\lambda+2\nu} \frac{\pi}{(\Gamma(\lambda))^2} \frac{\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}$. Avant même d'injecter un

développement de la fonction u(x) en puissance inverse de γ, on peut également injecter le développement initial : $\frac{(C_0)^2}{2\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x} \left(1 - \frac{\tilde{x}^2}{2\gamma}\right)^{\mu+\frac{2\lambda-1}{2}} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{C}_k D_{l+2k}(\tilde{x}) \right)^2 = 2^{1-2\lambda} \frac{2}{2\lambda+2\nu} \frac{\pi}{(\Gamma(\lambda))^2} \frac{\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}$.

Soit :

$$\begin{aligned} & \frac{(C_0)^2}{2\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x} \left(1 - \frac{\tilde{x}^2}{2\gamma}\right)^{\mu+\frac{2\lambda-1}{2}} \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} \tilde{C}_{k_1} \tilde{C}_{k_2} D_{l+2k_1}(\tilde{x}) D_{l+2k_2}(\tilde{x}) = 2^{1-2\lambda} \frac{2}{2\lambda+2\nu} \frac{\pi}{(\Gamma(\lambda))^2} \frac{\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)} \quad l = \nu - \mu \quad \tilde{\mu} = \mu + \lambda - \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow & \frac{(C_0)^2}{2\gamma} \sum_{k_1=-\left[\frac{\nu-\mu}{2}\right]}^{+\infty} \sum_{k_2=-\left[\frac{\nu-\mu}{2}\right]}^{+\infty} \tilde{C}_{k_1} \tilde{C}_{k_2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x} \left(1 - \frac{\tilde{x}^2}{2\gamma}\right)^{\tilde{\mu}} D_{\nu-\mu+2k_1}(\tilde{x}) D_{\nu-\mu+2k_2}(\tilde{x}) \right) = 2^{1-2\lambda} \frac{2}{2\lambda+2\nu} \frac{\pi}{(\Gamma(\lambda))^2} \frac{\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)} \\ \Rightarrow C_0 = & \left(\sum_{k_1=-\left[\frac{\nu-\mu}{2}\right]}^{+\infty} \sum_{k_2=-\left[\frac{\nu-\mu}{2}\right]}^{+\infty} \tilde{C}_{k_1} \tilde{C}_{k_2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x} \left(1 - \frac{\tilde{x}^2}{2\gamma}\right)^{\tilde{\mu}} D_{\nu-\mu+2k_1}(\tilde{x}) D_{\nu-\mu+2k_2}(\tilde{x}) \right) \right)^{-1} \sqrt{2^{1-2\lambda} \frac{4\gamma}{2\lambda+2\nu} \frac{\pi}{(\Gamma(\lambda))^2} \frac{\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}} \end{aligned}$$

Comme ici μ est entier et qu'en général λ est demi-entier alors $\tilde{\mu}$ reste entier, cela revient à connaître les expressions analytiques d'intégrales de la forme : $\int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x} \tilde{x}^{2p} D_{\nu-\mu+2k_1}(\tilde{x}) D_{\nu-\mu+2k_2}(\tilde{x})$. Ces

dernières intégrales se calculent avec la récurrence suivante dès lors que tous les paramètres sont effectivement entiers positifs ou nuls :

$$\begin{aligned} \text{Posons } Ip(k, m, n) = & \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x} \tilde{x}^k D_m(\tilde{x}) D_n(\tilde{x}) = Ip(k, n, m) \\ \left\{ \begin{aligned} Ip(0, m, n) = & \sqrt{2\pi} n! \delta_{n,m} \\ Ip(1, m, n) = & \sqrt{2\pi} (n! \delta_{m+1,n} + m! \delta_{m,n+1}) \\ Ip(k, m, n) = & Ip(k-1, m+1, n) + Ip(k-1, m, n+1) - (k-1)Ip(k-2, m, n) \quad k > 1 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Et dans l'expression : $\sum_{k_1=-\left[\frac{\nu-\mu}{2}\right]}^{+\infty} \sum_{k_2=-\left[\frac{\nu-\mu}{2}\right]}^{+\infty} \tilde{C}_{k_1} \tilde{C}_{k_2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x} \left(1 - \frac{\tilde{x}^2}{2\gamma}\right)^{\tilde{\mu}} D_{\nu-\mu+2k_1}(\tilde{x}) D_{\nu-\mu+2k_2}(\tilde{x}) \right)$ tous les indices n ou m

sont toujours positifs ou nuls, permettant d'appliquer cette récurrence.

Précédemment dans ce document nous avons prouvé par récurrence que pour le développement de la forme : $Asymptote_hps_v^{\lambda,\mu}(x,\gamma^2) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} C_0 \sum_{j=0}^{j=+\infty} \gamma^{-j} \sum_{i=-2j}^{i=2j} \tilde{c}_{i,j} D_{l+2i}(x\sqrt{2\gamma})$ (voir article de Do-Nhat « 1999, Asymptotic expansion of the Mathieu and prolate spheroidal eigenvalues for large parameter c »), les divers coefficients $\tilde{c}_{i,j}$ données s'annulent effectivement pour la condition donnée $l+2i < 0$.

Dans ces conditions la formule : $Asymptote_hps_v^{\lambda,\mu}(x,\gamma^2) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} C_0 \sum_{j=0}^{j=+\infty} \gamma^{-j} \sum_{i=-2j}^{i=2j} \tilde{c}_{i,j} D_{l+2i}(x\sqrt{2\gamma})$ ne comporte jamais de fonctions paraboliques cylindriques d'indice négatif et la constante de normalisation C_0 peut donc parfaitement se calculer. Le développement modifié de Do-Nhat s'écrit donc :

$$Asymptote_hps_v^{\lambda,\mu}(x,\gamma^2) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} C_0 \sum_{j=0}^{j=+\infty} \gamma^{-j} \sum_{i=\text{Max}\left(-\left[\frac{v-\mu}{2}\right], -2j\right)}^{i=2j} \tilde{c}_{i,j} D_{l+2i}(x\sqrt{2\gamma})$$

Par extension le développement du type :

$$\begin{cases} Asymptote_hps_v^{\lambda,\mu}(x) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} C_0 \sum_{k=-\left[\frac{v-\mu}{2}\right]}^{k=+\infty} \tilde{C}_k D_{l+2k}(x\sqrt{2\gamma}) \\ l = v - \mu \quad \text{et} \quad v, \mu \in \mathbf{N} \end{cases}$$

se limite donc aux seules fonctions paraboliques cylindriques d'indice positif ou nul, et dans ce cas la constante de normalisation C_0 peut également parfaitement se calculer sous la forme :

$$C_0 = \left(\sum_{k_1=-\left[\frac{v-\mu}{2}\right]}^{k_1=+\infty} \sum_{k_2=-\left[\frac{v-\mu}{2}\right]}^{k_2=+\infty} \tilde{C}_{k_1} \tilde{C}_{k_2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x} \left(1 - \frac{\tilde{x}^2}{2\gamma}\right)^{\tilde{\mu}} D_{v-\mu+2k_1}(\tilde{x}) D_{v-\mu+2k_2}(\tilde{x}) \right) \right)^{-1} \sqrt{2^{1-2\lambda} \frac{4\gamma}{2\lambda+2v} \frac{\pi}{(\Gamma(\lambda))^2} \frac{\Gamma(v+\mu+2\lambda)}{\Gamma(v-\mu+1)}}$$

C'est d'ailleurs ce que nous avons supposé dans ce chapitre sur la normalisation des développements asymptotiques.

Avec la normalisation de Flammer, ce processus est beaucoup plus simple :

$$\begin{cases} \nu - \mu \text{ pair} & \text{Asymptote_} hps_{\nu}^{\lambda, \mu}(0, \gamma^2) = hps_{\nu}^{\lambda, \mu}(0, \gamma^2) \\ \nu - \mu \text{ impair} & \text{Asymptote_} hps_{\nu}^{\lambda, \mu'}(0, \gamma^2) = hps_{\nu}^{\lambda, \mu'}(0, \gamma^2) \end{cases}$$

étant donné que les valeurs des fonctions paraboliques cylindriques en $x=0$ et celles de leurs dérivées premières sont les suivantes :

$$\begin{cases} l = \nu - \mu \text{ pair} & D_{l+2i}(0) = 2^{\frac{l+2i}{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{l+2i}{2}\right)} & D_l(0) = 2^{\frac{l}{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-l}{2}\right)} \\ l = \nu - \mu \text{ impair} & D_{l+2i}(0) = 0 & D_{l+2i}'(0) = -2^{\frac{1+l+2i}{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(-\frac{l+2i}{2}\right)} & D_l'(0) = -2^{\frac{1+l}{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(-\frac{l}{2}\right)} \end{cases}$$

La valeur de la constante de normalisation est la suivante :

$$\begin{cases} l = \nu - \mu \text{ pair} & \text{Asymptote_} hps_{\nu}^{\lambda, \mu}(0, \gamma^2) = C_0 (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \tilde{C}_k D_{l+2k}(0) \Rightarrow C_0 = \frac{hps_{\nu}^{\lambda, \mu}(0, \gamma^2)}{2^{\frac{l}{2}} \sqrt{\pi} \left(\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \tilde{C}_k \frac{2^k}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{l+2k}{2}\right)} \right)} \\ l = \nu - \mu \text{ impair} & \text{Asymptote_} hps_{\nu}^{\lambda, \mu'}(0, \gamma^2) = \sqrt{2\gamma} C_0 (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} \left(\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \tilde{C}_k D_{l+2k}'(0) \right) \Rightarrow C_0 = - \frac{hps_{\nu}^{\lambda, \mu'}(0, \gamma^2)}{2^{\frac{1+l}{2}} \sqrt{2\gamma} \sqrt{\pi} \left(\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \tilde{C}_k \frac{2^k}{\Gamma\left(-\frac{l+2k}{2}\right)} \right)} \end{cases}$$

Cette constante de normalisation est donc parfaitement définie car la fonction Γ ne présente aucun pôle.

Cas des fonctions d'ondes sphéroïdales aplaties (fonctions de Laguerre)

La formule asymptotique s'écrit :

$$\text{Asymptote}_{\text{hps}_v^{\lambda, \mu}}(x, -\gamma^2) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{k=-l}^{k=+\infty} C_k \left(e^{-\gamma(1-x)} L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}(2\gamma(1-x)) + (-1)^{(v-\mu)} e^{-\gamma(1+x)} L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}(2\gamma(1+x)) \right)$$

$$l = \begin{cases} \frac{v-\mu}{2} & v-\mu \text{ pair} \\ \frac{v-\mu-1}{2} & v-\mu \text{ impair} \end{cases} \quad \text{et } v, \mu \in \mathbb{N} \quad \text{et } \tilde{\mu} = \mu + \lambda - \frac{1}{2}$$

Si l'on choisit la normalisation de Meixner & Schafke :

$$\int_{-1}^{+1} dx (1-x^2)^{\frac{2\lambda-1}{2}} \left(\text{hps}_v^{\lambda, \mu}(x, -\gamma^2) \right)^2 = \int_{-1}^{+1} dx (1-x^2)^{\frac{2\lambda-1}{2}} \left(\text{Asymptote}_{\text{hps}_v^{\lambda, \mu}}(x, -\gamma^2) \right)^2 = 2^{1-2\lambda} \frac{2}{2\lambda+2v} \frac{\pi}{(\Gamma(\lambda))^2} \frac{\Gamma(v+\mu+2\lambda)}{\Gamma(v-\mu+1)}$$

Il vient une contrainte de la forme :

$$\int_{-1}^{+1} dx (1-x^2)^{\frac{2\lambda-1}{2}} \left(\text{Asymptote}_{\text{hps}_v^{\lambda, \mu}}(x, -\gamma^2) \right)^2 =$$

$$= (C_0)^2 \int_{-1}^{+1} dx (1-x^2)^{\mu+\frac{2\lambda-1}{2}} \left(\sum_{k=-l}^{k=+\infty} \tilde{C}_k \left(e^{-\gamma(1-x)} L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}(2\gamma(1-x)) + (-1)^{(v-\mu)} e^{-\gamma(1+x)} L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}(2\gamma(1+x)) \right) \right)^2 = 2^{1-2\lambda} \frac{2}{2\lambda+2v} \frac{\pi}{(\Gamma(\lambda))^2} \frac{\Gamma(v+\mu+2\lambda)}{\Gamma(v-\mu+1)}$$

Avec $\tilde{C}_k = \frac{C_k}{C_0}$

Pour calculer cette intégrale réalisons le changement de variable :

$$\tilde{x} = 2\gamma(1-x) \Leftrightarrow x = 1 - \frac{\tilde{x}}{2\gamma} \Rightarrow 1-x = \frac{\tilde{x}}{2\gamma} \quad \text{et} \quad 1+x = 2 \left(1 - \frac{\tilde{x}}{4\gamma} \right) \Rightarrow 1-x^2 = \frac{\tilde{x}}{\gamma} \left(1 - \frac{\tilde{x}}{4\gamma} \right)$$

Il vient :

$$\tilde{\mu} = \mu + \lambda - \frac{1}{2}$$

$$I = \int_{-1}^{+1} dx (1-x^2)^{\tilde{\mu}} \left(\sum_{k=-l}^{k=+\infty} \tilde{C}_k \left(e^{-\gamma(1-x)} L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}(2\gamma(1-x)) + (-1)^{(v-\mu)} e^{-\gamma(1+x)} L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}(2\gamma(1+x)) \right) \right)^2$$

$$= 2 \int_0^{+1} dx (1-x^2)^{\tilde{\mu}} \left(\sum_{k=-l}^{k=+\infty} \tilde{C}_k \left(e^{-\gamma(1-x)} L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}(2\gamma(1-x)) + (-1)^{(v-\mu)} e^{-\gamma(1+x)} L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}(2\gamma(1+x)) \right) \right)^2$$

$$= -\frac{1}{\gamma^{\tilde{\mu}+1}} \int_{2\gamma}^0 d\tilde{x} \left(1 - \frac{\tilde{x}}{4\gamma} \right)^{\tilde{\mu}} \tilde{x}^{\tilde{\mu}} \left(\sum_{k=-l}^{k=+\infty} \tilde{C}_k \left(e^{-\frac{\tilde{x}}{2}} L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}(\tilde{x}) + (-1)^{(v-\mu)} e^{-2\gamma \left(1 - \frac{\tilde{x}}{4\gamma} \right)} L_{l+k}^{(\tilde{\mu})} \left(4\gamma \left(1 - \frac{\tilde{x}}{4\gamma} \right) \right) \right) \right)^2$$

$$= \frac{1}{\gamma^{\tilde{\mu}+1}} \int_0^{2\gamma} d\tilde{x} \left(1 - \frac{\tilde{x}}{4\gamma} \right)^{\tilde{\mu}} \tilde{x}^{\tilde{\mu}} \left(\sum_{k=-l}^{k=+\infty} \tilde{C}_k \left(e^{-\frac{\tilde{x}}{2}} L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}(\tilde{x}) + (-1)^{(v-\mu)} e^{-2\gamma \left(1 - \frac{\tilde{x}}{4\gamma} \right)} L_{l+k}^{(\tilde{\mu})} \left(4\gamma \left(1 - \frac{\tilde{x}}{4\gamma} \right) \right) \right) \right)^2$$

Dans cette dernière intégrale on peut considérer que la contribution du terme $e^{-2\gamma \left(1 - \frac{\tilde{x}}{4\gamma} \right)} L_{l+k}^{(\tilde{\mu})} \left(4\gamma \left(1 - \frac{\tilde{x}}{4\gamma} \right) \right)$ à n'importe quel ordre de puissance de $1/\gamma$ est négligeable. Et l'intégrale est

de la forme : $I = \frac{1}{\gamma^{\tilde{\mu}+1}} \int_0^{2\gamma} d\tilde{x} \left(1 - \frac{\tilde{x}}{4\gamma} \right)^{\tilde{\mu}} \tilde{x}^{\tilde{\mu}} e^{-\tilde{x}} \left(\sum_{k=-l}^{k=+\infty} \tilde{C}_k L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}(\tilde{x}) \right)^2$. Dans ces conditions l'intégrale est

approximativement égale à : $I = \frac{1}{\gamma^{\tilde{\mu}+1}} \sum_{k_1=-l}^{k_1=+\infty} \sum_{k_2=-l}^{k_2=+\infty} \tilde{C}_{k_1} \tilde{C}_{k_2} \int_0^{2\gamma} d\tilde{x} \left(1 - \frac{\tilde{x}}{4\gamma} \right)^{\tilde{\mu}} \tilde{x}^{\tilde{\mu}} e^{-\tilde{x}} L_{l+k_1}^{(\tilde{\mu})}(\tilde{x}) L_{l+k_2}^{(\tilde{\mu})}(\tilde{x})$

Comme μ est entier et λ est supposé demi-entier alors $\tilde{\mu}$ reste entier et cela revient à évaluer une

série d'intégrales où les paramètres n, m, p sont tous entiers positifs ou nuls de la forme :

$I(j, m, l, p) = \int_0^{+\infty} d\tilde{x} \tilde{x}^{m+j} e^{-\tilde{x}} L_l^{(m)}(\tilde{x}) L_p^{(m)}(\tilde{x})$, on peut établir que :

$$\int_0^{+\infty} d\tilde{x} \tilde{x}^{\alpha-1} e^{-\tilde{x}} L_l^{(m)}(\tilde{x}) L_p^{(m)}(\tilde{x}) = \frac{(1+m)_l (m-\alpha+1)_p \Gamma(\alpha)}{l! p!} {}_3F_2(-l, \alpha, \alpha-m; m+1, \alpha-m-p; 1) \Rightarrow \lim_{\alpha \rightarrow m+1} \int_0^{+\infty} d\tilde{x} \tilde{x}^{\alpha-1} e^{-\tilde{x}} L_l^{(m)}(\tilde{x}) L_p^{(m)}(\tilde{x}) = \frac{(m+p)!}{p!} \delta_{l,p}$$

Ces dernières suivent une relation de récurrence :

$$I(0, m, l, p) = \frac{(m+p)!}{p!} \delta_{l,p}$$

$$I(j+1, m, l, p) = (2l+1+m)I(j, m, l, p) - (l+1)I(j, m, l+1, p) - (m+l)I(j, m, l-1, p)$$

Donc toutes les intégrales de l'expression I sont parfaitement définies

$I = \frac{1}{\gamma^{\mu+1}} \sum_{k_1=-l}^{k_1=+\infty} \sum_{k_2=-l}^{k_2=+\infty} \tilde{C}_{k_1} \tilde{C}_{k_2} \int_0^{\infty} d\tilde{x} \left(1 - \frac{\tilde{x}}{4\gamma}\right)^{\tilde{\mu}} \tilde{x}^{\mu} e^{-\tilde{x}} L_{l+k_1}^{(\tilde{\mu})}(\tilde{x}) L_{l+k_2}^{(\tilde{\mu})}(\tilde{x})$ et la constante de normalisation se calcule comme suit :

$$C_0 = \left(\sum_{k_1=-l}^{k_1=+\infty} \sum_{k_2=-l}^{k_2=+\infty} \tilde{C}_{k_1} \tilde{C}_{k_2} \int_0^{\infty} d\tilde{x} \left(1 - \frac{\tilde{x}}{4\gamma}\right)^{\tilde{\mu}} \tilde{x}^{\mu} e^{-\tilde{x}} L_{l+k_1}^{(\tilde{\mu})}(\tilde{x}) L_{l+k_2}^{(\tilde{\mu})}(\tilde{x}) \right)^{-\frac{1}{2}} \gamma^{\frac{\tilde{\mu}+1}{2}} \sqrt{2^{1-2\lambda} \frac{2}{2\lambda+2\nu} \frac{\pi}{(\Gamma(\lambda))^2} \frac{\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}}$$

Prenons le cas le plus simple où $\tilde{\mu}=0$, alors :

$$\int_0^{\infty} d\tilde{x} \tilde{x} e^{-\tilde{x}} L_{l+k_1}^{(0)}(\tilde{x}) L_{l+k_2}^{(0)}(\tilde{x}) = I(0, 0, l+k_1, l+k_2) = \delta_{k_1, k_2}$$

$$\Rightarrow C_0 = \left(\sum_{k_1=-l}^{k_1=+\infty} \sum_{k_2=-l}^{k_2=+\infty} \tilde{C}_{k_1} \tilde{C}_{k_2} \int_0^{\infty} d\tilde{x} \tilde{x} e^{-\tilde{x}} L_{l+k_1}^{(0)}(\tilde{x}) L_{l+k_2}^{(0)}(\tilde{x}) \right)^{-\frac{1}{2}} \gamma^{\frac{1}{2}} \sqrt{2^{1-2\lambda} \frac{2}{2\lambda+2\nu} \frac{\pi}{(\Gamma(\lambda))^2} \frac{\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}\right)}} = \gamma^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2^{2-2\lambda}}{2\lambda+2\nu}} \left(\sum_{k=-l}^{k=+\infty} (\tilde{C}_k)^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Si maintenant la normalisation de Chu et Stratton est choisie, au demeurant plus adaptée au cas des fonction d'ondes hyper-sphéroïdales aplaties :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x^2)^{-\frac{\mu}{2}} \text{Asymptote_} hps_v^{\lambda, \mu}(x, -\gamma^2) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x^2)^{-\frac{\mu}{2}} hps_v^{\lambda, \mu}(x, -\gamma^2)$$

Avec le développement :

$$\text{Asymptote_} hps_v^{\lambda, \mu}(x, -\gamma^2) = C_0 (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{k=-l}^{k=+\infty} \tilde{C}_k \left(e^{-\gamma(1-x)} L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}(2\gamma(1-x)) + (-1)^{(v-\mu)} e^{-\gamma(1+x)} L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}(2\gamma(1+x)) \right)$$

Il vient en négligeant le terme exponentiel décroissant $\text{Exp}[-2\gamma]$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x^2)^{-\frac{\mu}{2}} hps_v^{\lambda, \mu}(x, -\gamma^2) = C_0 \sum_{k=-l}^{k=+\infty} \tilde{C}_k \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} e^{-\gamma(1-x)} L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}(2\gamma(1-x)) + (-1)^{(v-\mu)} e^{-2\gamma} L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}(4\gamma) \right) \approx C_0 \sum_{k=-l}^{k=+\infty} \tilde{C}_k L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}(0)$$

En appliquant la valeur du polynôme de Laguerre en $x=0$, il vient :

$$L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}(0) = \frac{\Gamma(l+k+\tilde{\mu}+1)}{\Gamma(l+k+1)\Gamma(\tilde{\mu}+1)} \Rightarrow C_0 = \frac{\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x^2)^{-\frac{\mu}{2}} hps_v^{\lambda, \mu}(x, \gamma^2)}{\sum_{k=-l}^{k=+\infty} \tilde{C}_k L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}(0)} = \Gamma(\tilde{\mu}+1) \frac{\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x^2)^{-\frac{\mu}{2}} hps_v^{\lambda, \mu}(x, \gamma^2)}{\sum_{k=-l}^{k=+\infty} \tilde{C}_k \frac{\Gamma(l+k+\tilde{\mu}+1)}{\Gamma(l+k+1)}}$$

Tableau synoptique de la construction de solution de l'équation des ondes hyper-sphéroïdales

Pour conclure cette étude sur les solutions de l'équation des ondes hyper-sphéroïdales, voici un tableau synoptique qui retrace les méthodes de constructions des solutions de cette équation différentielle pour les valeurs du domaine des paramètres ν , μ et λ , sachant que l'introduction du paramètre ν est en quelque sorte artificielle car elle est essentiellement due à l'emploi d'un développement en série à l'aide de fonctions de base (fonctions de Gegenbauer associées) liées à ce même paramètre ν :

μ, ν, γ	Conditions	Solutions - Constructions
Toutes valeurs	Changement $\mu \rightarrow -\mu$ Changement $\nu \rightarrow -\nu - 1$	Études des constructions suffisantes pour $\mu \geq 0$ et $\nu \geq 0$
Toutes valeurs	$\gamma = 0$	$x \in [-1, 1] \quad C_{\nu}^{\lambda, \mu}(x), C_{(\frac{\nu}{2})}^{\lambda, \mu}(x) \quad \text{ou} \quad x > 1 \quad C_{\nu}^{\lambda, \mu}(x), C_{(\frac{\nu}{2})}^{\lambda, \mu}(x)$
μ, ν réels, γ réel	μ, ν quelconque, ν non demi-entier, ν non entier, μ non entier, $\gamma^2 > 0$, $x \in [-1, 1]$	Développement bilatéral en fonctions associées de Legendre $hps_{\nu}^{\lambda, \mu}(x, \gamma) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_{\nu, k}^{\lambda, \mu} C_{\nu+2k}^{\lambda, \mu}(x)$, récurrence à 3 termes
μ, ν réels, γ imaginaire	μ, ν quelconque, ν non demi-entier, ν non entier, μ non entier, $\gamma^2 < 0$, $x \in [-1, 1]$	Développement bilatéral en fonctions associées de Legendre $\gamma = i\gamma^* \rightarrow hps_{\nu}^{\lambda, \mu}(x, i\gamma^*) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_{\nu, k}^{\lambda, \mu} C_{\nu+2k}^{\lambda, \mu}(x)$, récurrence à 3 termes
μ, ν réels, γ réel	μ, ν quelconque, ν non demi-entier, ν non entier, μ non entier, $\gamma^2 < 0$, $x > 1$	Développement bilatéral en fonctions associées de Legendre $HPs_{\nu}^{\lambda, \mu}(x, \gamma) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_{\nu, k}^{\lambda, \mu} C_{\nu+2k}^{\lambda, \mu}(x)$, récurrence à 3 termes Développement bilatéral en fonctions de Bessel, récurrence à 3 termes $HS_{\nu}^{(1), \lambda, \mu}(x, \gamma) = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{\mu}{2}} x^{-\lambda} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_{\nu, k}^{\lambda, \mu} J_{\nu+2k}(\gamma x) \quad HS_{\nu}^{(2), \lambda, \mu}(x, \gamma) = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{\mu}{2}} x^{-\lambda} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_{\nu, k}^{\lambda, \mu} Y_{\nu+2k}(\gamma x)$
μ, ν réels, γ imaginaire	μ, ν quelconque, ν non demi-entier, ν non entier, μ non entier, $\gamma^2 < 0$, $x > 1$	Développement bilatéral en fonctions associées de Legendre $\gamma = i\gamma^* \rightarrow HPs_{\nu}^{\lambda, \mu}(x, i\gamma^*) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_{\nu, k}^{\lambda, \mu} C_{\nu+2k}^{\lambda, \mu}(x)$, récurrence à 3 termes Développement bilatéral en fonctions de Bessel, récurrence à 3 termes $\gamma = i\gamma^* \Rightarrow HS_{\nu}^{(1,2), \lambda, \mu}(i x, i\gamma^*) = HS_{\nu}^{(2), \lambda, \mu}(i x, i\gamma^*)$ $HS_{\nu}^{(1), \lambda, \mu}(i x, i\gamma^*) = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{\mu}{2}} x^{-\lambda} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_{\nu, k}^{\lambda, \mu} J_{\nu+2k}(-\gamma^* x) \quad S_{\nu}^{(2), \lambda, \mu}(i x, i\gamma^*) = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{\mu}{2}} x^{-\lambda} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_{\nu, k}^{\lambda, \mu} Y_{\nu+2k}(-\gamma^* x)$
μ, ν entiers, γ réel	$0 \leq \mu \leq \nu$, $\gamma^2 > 0$, $x \in [-1, 1]$	Développement unilatéral à gauche en fonctions associées de Legendre, $hps_{\nu}^{\lambda, \mu}(x, \gamma) = \sum_{k=-\lfloor \frac{\nu-\mu}{2} \rfloor}^{+\infty} d_{\nu, k}^{\lambda, \mu} C_{\nu+2k}^{\lambda, \mu}(x)$, récurrence à 3 termes
μ, ν entiers, γ réel	$0 \leq \mu \leq \nu$, $\gamma^2 < 0$, $x \in [-1, 1]$	Développement unilatéral à gauche en fonctions associées de Legendre, $\gamma = i\gamma^* \rightarrow hps_{\nu}^{\lambda, \mu}(x, i\gamma^*) = \sum_{k=-\lfloor \frac{\nu-\mu}{2} \rfloor}^{+\infty} d_{\nu, k}^{\lambda, \mu} C_{\nu+2k}^{\lambda, \mu}(x)$, récurrence à 3 termes
μ, ν entiers, γ réel	$0 \leq \mu \leq \nu$, $\gamma^2 < 0$, $x > 1$	Développement unilatéral à gauche en fonctions associées de Legendre, $HPs_{\nu}^{\lambda, \mu}(x, \gamma) = \sum_{k=-\lfloor \frac{\nu-\mu}{2} \rfloor}^{+\infty} d_{\nu, k}^{\lambda, \mu} HP_{\nu+2k}^{\lambda, \mu}(x)$, récurrence à 3 termes. Développement unilatéral en fonctions de Bessel, récurrence à 3 termes $HS_{\nu}^{(1), \lambda, \mu}(x, \gamma) = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{\mu}{2}} x^{-\lambda} \sum_{k=-\lfloor \frac{\nu-\mu}{2} \rfloor}^{+\infty} d_{\nu, k}^{\lambda, \mu} J_{\nu+2k}(\gamma x) \quad HS_{\nu}^{(2), \lambda, \mu}(x, \gamma) = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{\mu}{2}} x^{-\lambda} \sum_{k=-\lfloor \frac{\nu-\mu}{2} \rfloor}^{+\infty} d_{\nu, k}^{\lambda, \mu} Y_{\nu+2k}(\gamma x)$ voir tableau synoptique des développements alternatifs des fonctions hyper-sphéroïdales radiales à l'aide de fonctions de Bessel

μ, ν, γ	Conditions	Solutions - Constructions
μ, ν entiers, γ imaginaire	$0 < \mu \leq \nu, \gamma^2 < 0, x > 1$	<p>Développement unilatéral à gauche en fonctions associées de Legendre,</p> $\gamma = i\gamma^* \rightarrow HPS_{\nu}^{\lambda, \mu}(x, \gamma) = \sum_{k=-\left[\frac{\nu-\mu}{2}\right]}^{+\infty} d_{\nu, k}^{\lambda, \mu} C_{\nu+2k}^{\lambda, \mu}(x), \text{ récurrence à 3 termes}$ <p>Développement unilatéral en fonctions de Bessel, récurrence à 3 termes</p> $\gamma = i\gamma^* \Rightarrow S_{\nu}^{(1,2), \mu}(ix, i\gamma^*) S_{\nu}^{(2), \mu}(ix, i\gamma^*)$ $HS_{\nu}^{(1), \mu}(ix, i\gamma^*) = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{\mu}{2}} x^{-\lambda} \sum_{k=-\left[\frac{\nu-\mu}{2}\right]}^{+\infty} d_{\nu, k}^{\lambda, \mu} J_{\nu+2k}(-\gamma^* x) \quad S_{\nu}^{(2), \mu}(ix, i\gamma^*) = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{\mu}{2}} x^{-\lambda} \sum_{k=-\left[\frac{\nu-\mu}{2}\right]}^{+\infty} d_{\nu, k}^{\lambda, \mu} Y_{\nu+2k}(-\gamma^* x)$
μ entier, ν réel	μ entier, ν quelconque, γ quelconque	Solutions exactes et algébriques $\mu=1, 2, 3$ correspond à une récurrence à 3 termes limitée à gauche et à droite
$\mu+\lambda=1, \nu+\lambda$ entier	$\mu + \lambda = 1 \quad \nu + \lambda$ entier	Solutions exactes en tant que fonctions de Mathieu périodiques
$\mu+\lambda=1, \nu+\lambda$ réel, non demi-entier	$\mu + \lambda = 1 \quad \nu + \lambda$ réel	<p>Solutions Exactes en tant que fonctions de Mathieu non périodiques,</p> $\frac{ce_{\nu+\lambda}^{1-\lambda-\mu}(ArcCos(x))}{(1-x^2)^{\frac{\lambda}{2}}}, \text{ également construites comme un développement}$ <p>bilatérale en fonctions associées de Legendre :</p> $hps_{\nu}^{\lambda, \mu}(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_{\nu, k}^{\lambda, \mu} C_{\nu+2k}^{\lambda, \mu}(x)$
$\mu+\lambda, \nu+\lambda$ entiers	$\mu + \lambda, \nu + \lambda$ tous deux entiers	<p>Solutions exactes en tant que fonctions associées intermédiaires de Mathieu périodiques</p> $\frac{cce_{2n}^{1-\lambda-\mu}(ArcCos(x))}{(1-x^2)^{\frac{\mu+2\lambda-1}{2}}} \text{ (constructions dues à E.L.Ince, récurrence à 4 termes)}$
$\mu+\lambda$ réel, $\nu+\lambda$ demi-entier	$\mu + \lambda \in \mathbf{R}, \quad \nu + \lambda$ entier	<p>Solutions exactes en tant que fonctions associées de Mathieu périodiques</p> $\frac{cce_{2n}^{1-\lambda-\mu}(ArcCos(x))}{(1-x^2)^{\frac{\lambda}{2}}} \text{ (constructions avec une récurrence à 5 termes)}$
$\mu+\lambda$ réel non entier, ν demi-entier	μ quelconque non entier et non demi-entier ν demi-entier	<p>Développement en fonctions de Gegenbauer :</p> $hps_{\nu}^{\lambda, \mu}(x, \gamma) = (1-x^2)^{-\frac{\mu+2\lambda-1}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_{\nu, k}^{\lambda, \mu} C_{\nu+2k}^{1-\lambda-\mu}(x)$
μ, ν entiers, γ réel	$\gamma >> 0$, grande valeur de γ	<p>Développement en fonctions paraboliques cylindriques :</p> $hps_{\nu}^{\lambda, \mu}(x, \gamma) \propto (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{k=-\left[\frac{\nu-\mu}{2}\right]}^{+\infty} \tilde{C}_k D_{l+2k}(x\sqrt{2\gamma}) \quad l = \nu - \mu$
μ, ν entiers, γ imaginaire	$\gamma = i\gamma^*, \gamma^* >> 0$, grande valeur de γ^*	<p>Développement en fonctions généralisées de Laguerre</p> $\gamma = i\gamma^* \rightarrow hps_{\nu}^{\lambda, \mu}(x, \gamma) \propto (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{k=-l}^{+\infty} C_k \left(e^{-\gamma^*(1-x)} L_{l+k}^{(\tilde{\mu})}(2\gamma^*(1-x)) + (-1)^{(\nu-\mu)} e^{-\gamma^*(1+x)} L_{l+k}^{(\mu)}(2\gamma^*(1+x)) \right)$ $l = \frac{\nu-\mu}{2} \text{ si } \nu-\mu \text{ pair} \quad l = \frac{\nu-\mu-1}{2} \text{ si } \nu-\mu \text{ impair} \quad \tilde{\mu} = \mu + \lambda - \frac{1}{2}$
μ, ν réels, γ réel ou imaginaire	$\gamma^2 > 0, \gamma^2 < 0, x \in [-1, 1]$ ou $x > 1$	<p>Développement en fonctions de Gegenbauer associées :</p> $hps_{\nu}^{\lambda, \mu}(x, \gamma) \propto \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_{\nu+2k}^{\lambda, \mu}(x) \sum_{j= k }^{+\infty} (-1)^{j+k} d_{k, j} \gamma^{2j}$